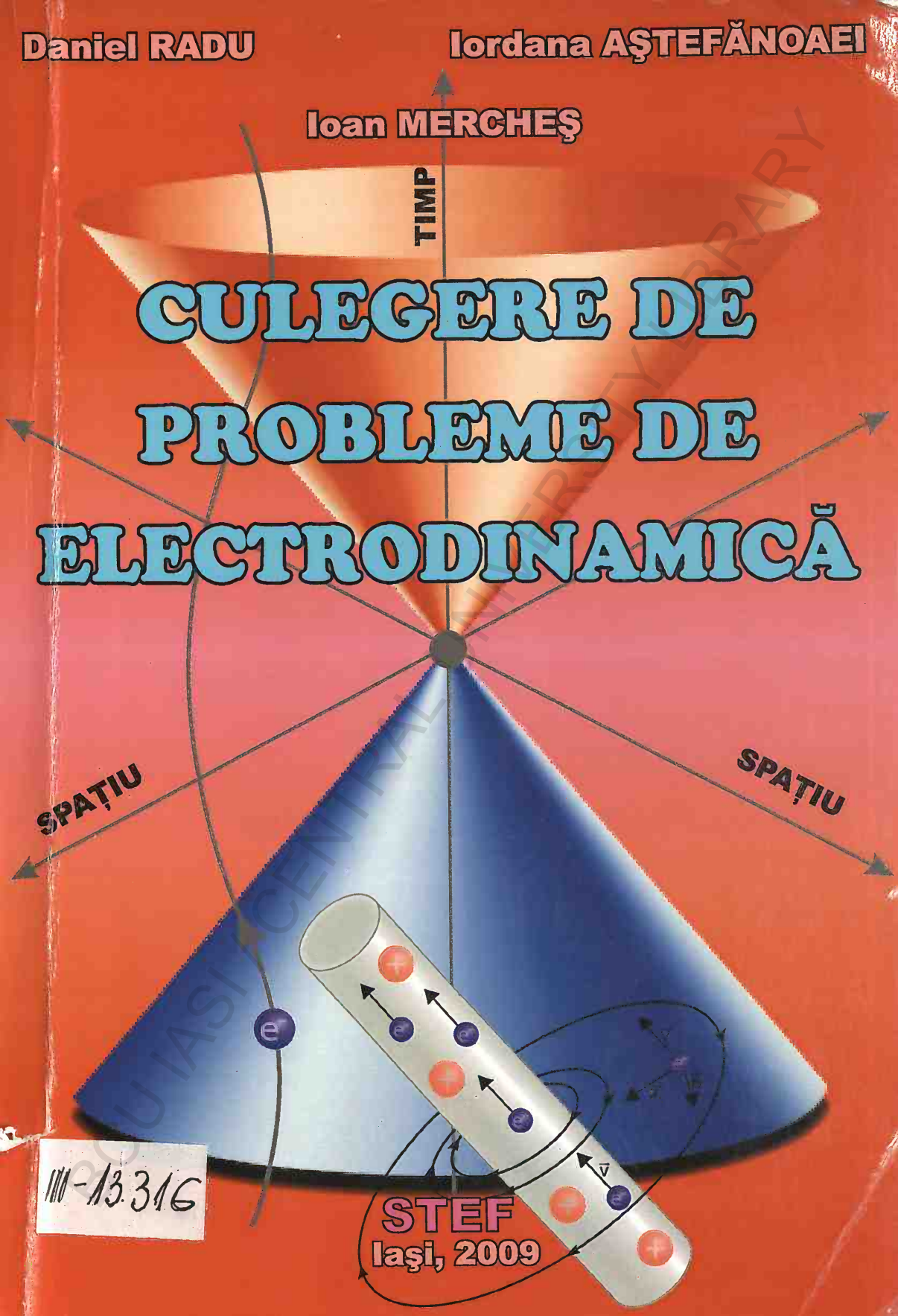
Daniel RADU
Iordana AŞTEFĂNOAEI
Ioan MERCHEŞ



CULEGERE DE PROBLEME DE ELECTRODINAMICĂ

III-13.316

STEF
Iaşi, 2009

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BIBL. CENTR. UNIV.
„M. EMINESCU" IAȘI
FIZICA
III - 13.316

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Daniel RADU Iordana AŞTEFĂNOAEI

Ioan MERCHEŞ

CULEGERE DE PROBLEME DE ELECTRODINAMICA

135711
B.C.U. - IASI

EDITURA STEF

- IAŞI, 2009 -

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Referenți științifici:
Prof. univ. emeritus Ioan GOTTLIEB (Universitatea „Al.I. Cuza" Iași)
Prof.univ.dr. Maricel AGOP (Universitatea Tehnică „Gh. Asachi" Iași)

ISBN 978-973-1809-49-6
Editura STEF
Acreditată CNCSIS din 2006

700705, IASI, Bd. Carol I, nr. 8, parter
Tel./Fax. 0232-216829; 0745-236413
E-mail: office@editurastef.ro
http://www.editurastef.ro

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cuprins

Prefață

Partea I:
ELECTRODINAMICĂ FENOMENOLOGICĂ

I. Electrostatică 1
II. Magnetostatică 37
III. Energia câmpurilor electrostatic şi magnetostatice. Inducţia electromagnetică 65
IV. Curenţi staţionari şi cuasistaţionari 83
V. Potenţialele Wiechert-Lienard. Unde electromagnetice 121
VI. Mişcarea particulelor încărcate în câmp electromagnetic 161
VII. Magnetofluidodinamică. Plasmă 185
VIII. Dinamică relativistă. Reacţii 215

Partea a II-a:
ELECTRODINAMICA ÎN TRATARE RELATIVIST-COVARIANTĂ

IX. Relaţiile de transformare a câmpurilor 233
X. Dinamică relativist-covariantă 259
XI. Teoria relativităţii generale 303

Partea a III-a:
ANEXE

Anexa A: Elemente de calcul tensorial 335
Anexa B: Tensori de ordinul întâi (vectori) în spaţiul euclidian tridimensional 345
Anexa C: Vectori şi tensori în spaţiul Minkowski 357
Anexa D: Coordonate curbilinii în spaţiul fizic 371
Anexa E: Distribuţia δ a lui Dirac 379
Anexa F: Funcţia Green 387

Bibliografie 389

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

PREFAȚĂ

Prezenta culegere conține un număr de șaptezeci de probleme rezolvate, repartizate pe capitole potrivit modului de organizare a materiei în cadrul cursului de *Electrodinamică* apărut în anul 2002, la Editura Universității „Al.I.Cuza" din Iași, autori Ioan Mercheș și Daniel Radu.

Electrodinamica poate fi abordată sub mai multe aspecte, fiecare corespunzând unui anumit nivel al calității instrumentului de cercetare. Astfel, dacă inițial teoria lui Maxwell, a producerii și propagării câmpului electromagnetic, era studiată din punct de vedere fenomenologic (ultimul sfert al sec. XIX), după apariția Teoriei relativității restrânse și apoi a celei generalizate (începutul sec. XX) a fost necesar un nou aparat matematic de investigație, bazat pe calculul tensorial și geometria riemanniană. Un astfel de formalism permite tratarea relativist-covariantă a Electrodinamicii, în spații plate (universul minkowskian) sau curbe (spațiul Riemann). O abordare exhaustivă a câmpului electromagnetic, de fapt a oricărui câmp, este realizată prin formalismul celei de a doua cuantificări (Teoria cuantică a câmpului), metodă care depășește, însă, limitele acestei culegeri.

Problemele sunt inserate, pe cât posibil, gradual ca dificultate, respectând totodată nivelul de pregătire matematică a studenților anului al doilea de la Facultatea de Fizică, an în care este audiat cursul de Electrodinamică. Majoritatea problemelor conține în final interpretarea rezultatului obținut, interpretare care este de fapt scopul formulării și apoi a rezolvării exercițiului. Acolo unde se impune, la începutul problemei este expusă o parte pregătitoare, teoretică, necesară rezolvării acesteia. O parte dintre probleme sunt concepute de autori, restul fiind adaptate după exercițiile tipice disciplinei, care se regăsesc în cvasitotalitatea culegerilor de probleme pe profil. Menționăm faptul că obținerea și interpretarea soluțiilor unor probleme care conduc la ecuații neliniare și/sau transcendente a fost făcută doar numeric, utilizând soft-urile specializate în calcul analitic și numeric *Mathematica* (în marea majoritate a cazurilor) și *Maple* (pentru rezolvarea problemelor de teoria relativității generale, întrucât acest soft include un pachet special dedicat calculului tensorial specific acestei teorii).

BUAIC CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Culegerea este completată cu un număr de cinci anexe, conținând complemente de matematică absolut indispensabile studiului electrodinamicii prin aplicații: calcul tensorial, analiză vectorială, distribuția delta a lui Dirac, funcția Green etc.

Nutrim speranța că prezenta culegere va fi utilă și studenților altor facultăți, îndeosebi celor de la facultățile universităților tehnice, precum și cadrelor didactice din învățământul liceal care se pregătesc în vederea obținerii diverselor trepte de calificare (definitivat, gradele I și II).

În final dorim să scoatem în evidență faptul că, deși Electrodinamica se numără printre disciplinele teoretice fundamentale conținute în curricula Facultăților de Fizică, culegerile de probleme dedicate acestei discipline sunt foarte puține. Acesta este, poate, unul dintre motivele esențiale care ne-au determinat să colaborăm pentru a produce un instrument necesar studierii Electrodinamicii.

Iași, ianuarie 2009 Autorii

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I. ELECTROSTATICĂ

Problema nr. 1

Să se determine potențialul $V(r)$ și intensitatea câmpului electric $\vec{E}(r)$ într-un punct oarecare din interiorul și exteriorul unei sfere de rază R, încărcată uniform cu sarcina electrică Q.

Rezolvare

Potențialul câmpului electrostatic rezultă ca soluție a ecuației lui Poisson

$$\Delta V = \begin{cases} -\rho/\varepsilon_0, & \text{dacă } q \text{ este în interiorul sferei}, \\ 0, & \text{dacă } q \text{ este în exteriorul sferei}, \end{cases} \tag{1.1}$$

unde $\rho = \dfrac{3Q}{4\pi R^3}$ este densitatea volumică de sarcină electrică în interiorul sferei.

Întrucât problema are simetrie sferică, vom utiliza expresia laplaceanului în coordonate sferice

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)\right] + \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}\right]\right\}. \tag{1.2}$$

Datorită simetriei problemei, potențialul V nu depinde de variabilele unghiulare $[V(\vec{r}) \equiv V(r)]$ și atunci în relația (1.2) rămâne doar partea radială

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)\right]. \tag{1.3}$$

Cazul 1: Potențialul și câmpul electric într-un punct aflat în interiorul sferei.

Notând cu $V_i(r)$ potențialul în interiorul sferei și cu $E_i(r)$ intensitatea câmpului electric, din relațiile (1.1) și (1.3) rezultă

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V_i}{\partial r}\right)\right] = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{1.4}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi integrând o dată deducem

$$r^2 \frac{\partial V_i}{\partial r} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{3} + C_1 , \tag{1.5}$$

unde C_1 este o constantă arbitrară de integrare, ce urmează a fi determinată. Din relaţia (1.5) rezultă că

$$\frac{\partial V_i}{\partial r} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} + \frac{C_1}{r^2}, \tag{1.5'}$$

de unde, printr-o nouă integrare, obţinem expresia finală a potenţialului

$$V_i(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{C_1}{r} + C_2 . \tag{1.6}$$

Intensitatea câmpului electric $\vec{E} = -grad\, V$ rezultă direct din expresia (1.5'):

$$E_i(r) = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_i = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \frac{C_1}{r^2} . \tag{1.7}$$

Cazul 2: Potenţialul şi câmpul electric într-un punct aflat în exteriorul sferei.

În acest caz, vom nota potenţialul în interiorul sferei prin $V_e(r)$, iar intensitatea câmpului electric prin $E_e(r)$. Atunci, într-un punct din exteriorul sferei ecuaţia Poisson (1.1) se va scrie

$$\Delta V_e(r) = 0, \tag{1.8}$$

sau, având în vedere (1.3),

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V_e}{\partial r}\right)\right] = 0, \tag{1.9}$$

de unde

$$r^2 \frac{\partial V_e}{\partial r} = C_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V_e}{\partial r} = \frac{C_3}{r^2} .$$

Prin integrare, rezultă potenţialul câmpului electrostatic în exteriorul sferei ca fiind

$$V_e(r) = -\frac{C_3}{r} + C_4 , \tag{1.10}$$

iar câmpul electrostatic corespunzător va fi

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$E_e(r) = -\frac{\partial V_e}{\partial r} = -\frac{C_3}{r^2}. \tag{1.11}$$

Constantele arbitrare de integrare C_1, C_2, C_3 şi C_4 pot fi determinate impunând condiţiile la limită

$$V_e(r \to \infty) = 0, \tag{1.12}$$

$$V_i(r \to 0) = \text{finit} \tag{1.13}$$

şi condiţiile de continuitate

$$V_i(R) = V_e(R) \tag{1.14}$$

$$E_i(R) = E_e(R). \tag{1.15}$$

Din (1.10) şi (1.12) rezultă că $C_4 = 0$, iar din (1.6) şi (1.13) rezultă că $C_1 = 0$. Condiţiile (1.14) şi (1.15) dau pe C_2 şi C_3:

$$C_2 = \rho R^2 / 2\varepsilon_0 \tag{1.16}$$

$$C_3 = -\rho R^3 / 3\varepsilon_0. \tag{1.17}$$

Introducând valorile constantelor de integrare astfel determinate în relaţiile (1.6), (1.7), (1.10) şi (1.11), pentru potenţialul şi intensitatea câmpului electrostatic în interiorul şi respectiv în exteriorul sferei încărcate cu sarcina electrică Q se obţin expresiile

$$\begin{cases} V_i(r) \equiv V(r)\big|_{r \le R} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{r^2}{3R^2}\right) = \dfrac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \dfrac{r^2}{3R^2}\right), \\ E_i(r) \equiv E(r)\big|_{r \le R} = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}, \end{cases} \tag{1.18}$$

respectiv

$$\begin{cases} V_e \equiv V(r)\big|_{r > R} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \\ E_e \equiv E(r)\big|_{r > R} = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \end{cases} \tag{1.19}$$

a căror reprezentare grafică arată ca în figurile 1.1 [(1.18 a) + (1.19 a)] şi 1.2 [(1.18 b) + (1.19 b)].

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

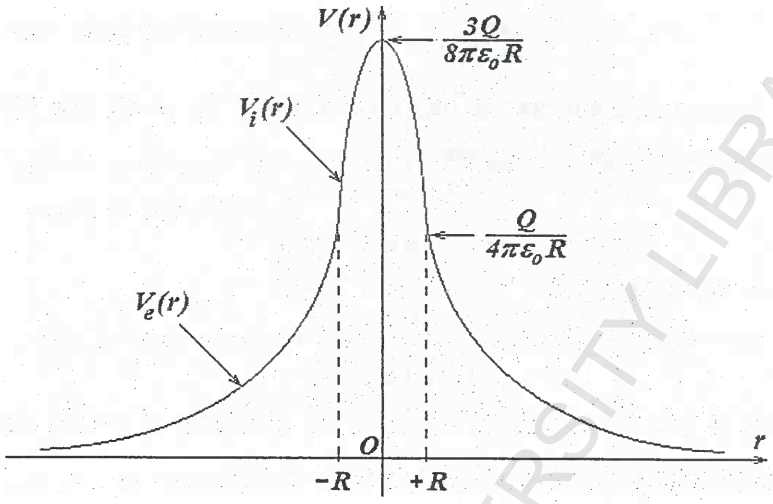


Fig. 1.1

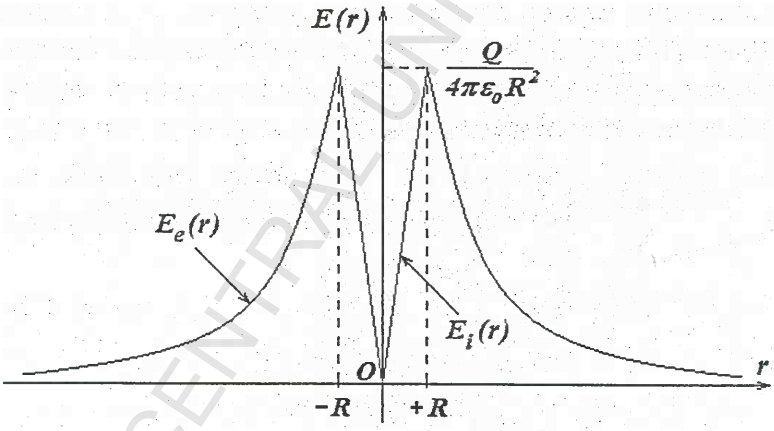


Fig. 1.2

Observație: În acord cu teorema Gauss pentru câmpul electrostatic, potențialul şi intensitatea câmpului electrostatic generate de distribuția volumică uniformă de sarcină electrică din interiorul sferei de rază R într-un punct oarecare situat în afara sferei sunt identice cu acelea ale unei sarcini electrice punctiforme aflată în centrul sferei şi având valoarea egală cu sarcina electrică totală conținută în interiorul sferei.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 2

Un disc circular de rază R este electrizat uniform ($\sigma = const.$). Să se determine câmpul electrostatic produs de disc într-un punct oarecare pe axul acestuia.

Rezolvare

Potențialul câmpului într-un punct oarecare de pe axa Oz (vezi figura 2.1) este dat de relația

$$V(0,\ 0,\ z>0)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(S)}\frac{dq}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(S)}\frac{\sigma dS}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(S)}\frac{\sigma 2\pi r'dr'}{r}=$$

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^R\frac{r'dr'}{\sqrt{r'^2+z^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{r'^2+z^2}\Big|_0^R=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}-z\right). \tag{2.1}$$

Din considerente de simetrie, pentru $z<0$ potențialul V trebuie să fie același, astfel că

$$V(0,\ 0,\ z<0)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+z^2}+z\right). \tag{2.2}$$

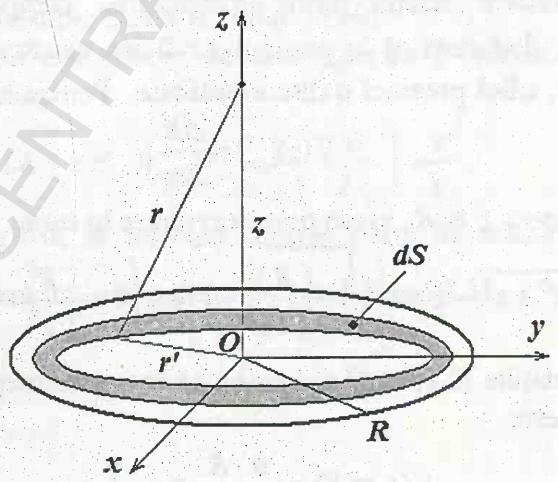


Fig. 2.1

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din expresiile (2.1) şi (2.2) rezultă că potenţialul V are o comportare singulară în punctul $z=0$. Acest fapt este evidenţiat şi de reprezentarea grafică din figura 2.2.

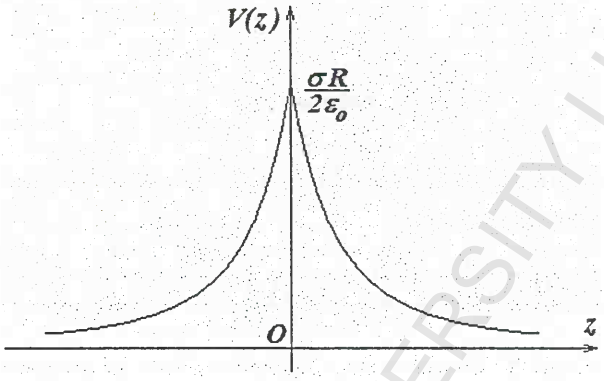


Fig. 2.2

Pentru $z<0$, graficul are o pantă pozitivă deoarece funcţia $V(z)$ este crescătoare, iar pentru $z>0$, panta graficului este negativă, deoarece funcţia $V(z)$ este descrescătoare. Prin urmare, potenţialul $V(z)$ prezintă o schimbare bruscă a semnului pantei în originea axelor de coordonate. Având în vedere relaţia dintre intensitatea câmpului şi potenţial, $\vec{E}=-grad\,V$, deducem că în punctul $z=0$ intensitatea câmpului electric suferă un salt, adică prezintă o discontinuitate. Pentru $z=0$,

$$V(z)\big|_{z=0}=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}, \tag{2.3}$$

în timp ce pentru $z\gg R$, avem prin dezvoltare în serie

$$\sqrt{R^2+z^2}-z=z\left[\sqrt{1+\left(\frac{R}{z}\right)^2}-1\right]\cong z\left(1+\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}-1\right)=\frac{R^2}{2z}. \tag{2.4}$$

Din relaţiile (2.1) şi (2.4) rezultă că în aproximaţia $z\gg R$ expresia potenţialului este

$$V(z\gg R)=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{2z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z}, \tag{2.5}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

rezultat care era de aşteptat, deoarece pentru $z \gg R$, discul apare ca fiind punctiform.

Întrucât $V = V(z)$ [deci nu depinde de x şi y] şi $\vec{E} = -grad\, V$, urmează că $\vec{E} = (0,\ 0,\ E_z)$, cu $E_z = -dV/dz$. Avem

$$E_{z+} = E_z(z>0) = -\frac{dV(z>0)}{dz} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right) \tag{2.6}$$

şi

$$E_{z-} = E_z(z<0) = -\frac{dV(z<0)}{dz} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right). \tag{2.7}$$

Calculând limita expresiilor (2.6) şi (2.7) în punctul $z = 0$, rezultă

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z>0}} E_z = \lim_{z\to 0} E_{z+} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{2.8}$$

şi

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z<0}} E_z = \lim_{z\to 0} E_{z-} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{2.9}$$

Din relaţiile (2.8) şi (2.9) rezultă că valorile intensităţii câmpului creat de un disc încărcat electrostatic, în punctul $z = 0$, sunt identice cu valorile intensităţii câmpului unui plan infinit, încărcat uniform cu sarcina electrică de densitate superficială σ, aflat în vid.

Acest rezultat este corect, deoarece pentru $z \to 0$ discul apare ca un plan infinit. În plus,

$$(E_{z+} - E_{z-})\big|_{z=0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{2.10}$$

adică în punctul $z = 0$, la trecerea dintr-o parte în cealaltă a discului, câmpul electric suferă un salt egal cu $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (vezi figura 2.3).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

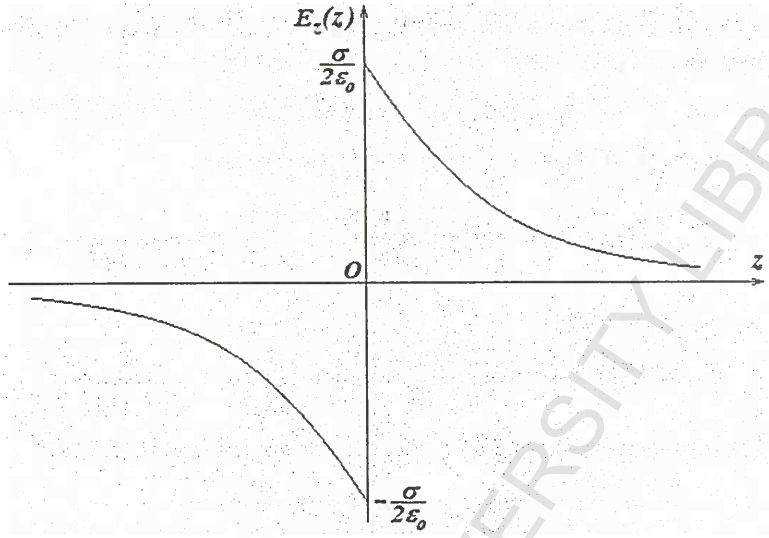


Fig. 2.3

Problema nr. 3

Să se determine forma suprafețelor echipotențiale ale câmpului produs de o sarcină distribuită uniform ($\lambda = const.$) de-a lungul unui fir rectiliniu de lungime $2c$.

Rezolvare

Alegând axele în mod convenabil, potențialul câmpului creat de firul electrizat, într-un punct oarecare P, V_P, este

$$V_P = k_e \int_{-c}^{+c} \frac{dq}{r} = k_e \lambda \int_{-c}^{+c} \frac{d\xi}{r}; \quad \left(k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right), \tag{3.1}$$

unde $d\xi$ este un element de lungime din fir (vezi figura 3.1).

Având în vedere că $r = \left[(x-\xi)^2 + y^2\right]^{1/2}$, vom face substituția $u = x - \xi + r$. Avem

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

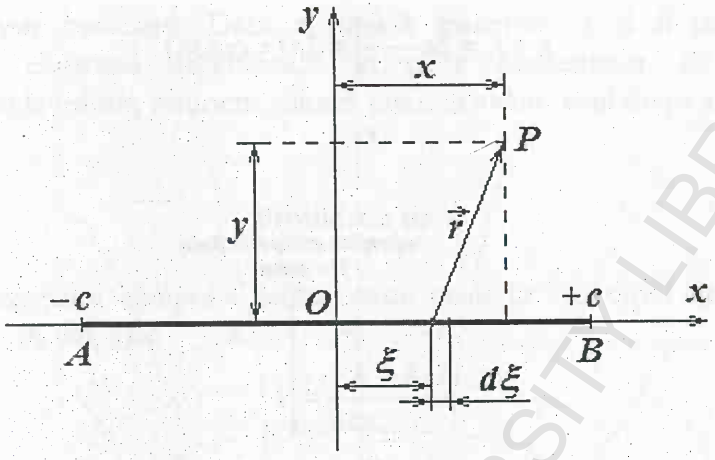


Fig. 3.1

$$\frac{dr}{d\xi}=-\frac{x-\xi}{r}=1-\frac{u}{r}. \tag{3.2}$$

Pe de altă parte, $dr=du+d\xi$, ceea ce conduce la

$$\frac{d\xi}{r}=-\frac{du}{u}. \tag{3.3}$$

Aşadar,

$$V_P=-k_e\lambda\int_{u_1}^{u_2}\frac{du}{u}=k_e\lambda\ln\frac{x+c+r_1}{x-c+r_2}. \tag{3.4}$$

Vom găsi suprafeţele echipotenţiale căutate egalând V_P cu o constantă K. Notând $x+c=x_1$; $x-c=x_2$, avem

$$x_1+r_1=K(x_2+r_2). \tag{3.5}$$

„Prelucrând" în mod convenabil relaţiile

$$r_1^2=x_1^2+y^2;\quad r_2^2=x_2^2+y^2,$$

în virtutea lui (3.5), mai avem

$$r_2-x_2=K(r_1-x_1). \tag{3.6}$$

Din (3.5) şi (3.6) deducem atunci că

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI
FIZICĂ
BCUIASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$r_1 + r_2 = 2c\frac{K+1}{K-1} = 2a\,(=const.). \tag{3.7}$$

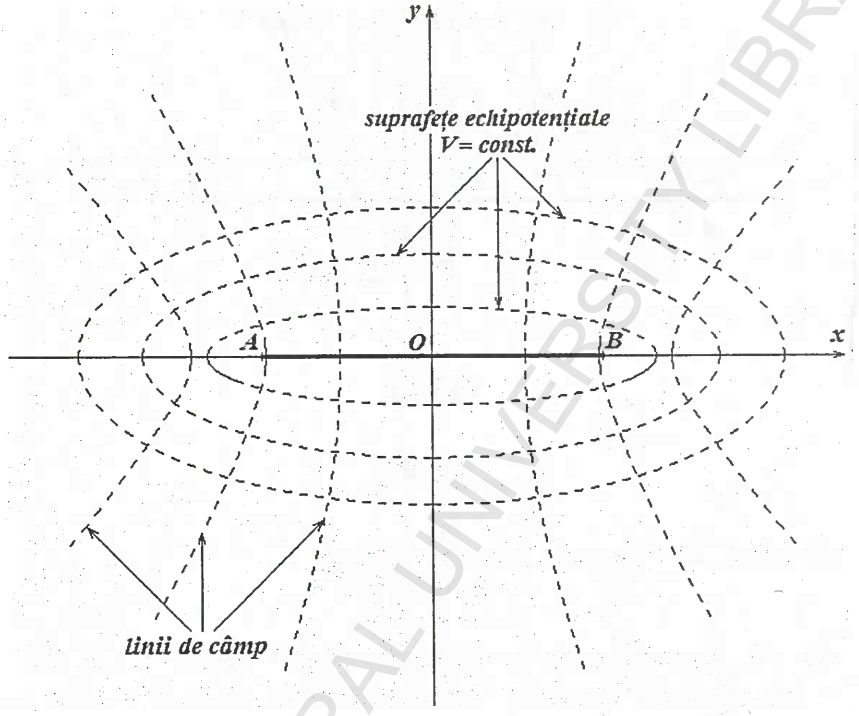


Fig. 3.2

Aşadar, locul geometric al punctelor care satisfac condiția $V_P = const.$ $(K\ fix)$ este o elipsă având focarele în extremitățile firului. Rotind figura în jurul axei Ox şi dând lui K diverse valori, obținem *elipsoizi de revoluție, omofocali, cu focarele în punctele* A *şi* B. Liniile de câmp sunt ortogonale la suprafețele echipotențiale în fiecare punct al câmpului (vezi figura 3.2).

Este uşor de arătat că $K = \dfrac{a+c}{a-c}$, deci, în fine

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\lambda\ \ln\frac{a+c}{a-c}. \tag{3.8}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cazuri particulare. Daca apropiem punctele A şi B până ce se confundă, elipsoizii degenerează în sfere concentrice, iar dacă le îndepărtăm la infinit, obţinem cilindri coaxiali având firul drept axă.

Problema nr. 4

Potenţialul câmpului electrostatic creat de un dipol de moment $\vec{p} = const.$, în vid, este

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}. \tag{4.1}$$

Să se calculeze intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ şi să se găsească liniile de forţă ale câmpului electric.

Rezolvare

Avem

$$\vec{E} = -grad\ V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right), \tag{4.2}$$

în care (vezi Anexa B)

$$\nabla\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\nabla(\vec{p}\cdot\vec{r}) + (\vec{p}\cdot\vec{r})\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3}\Bigg[\vec{p}\times\underbrace{(\nabla\times\vec{r})}_{=0} + \vec{r}\times\underbrace{(\nabla\times\vec{p})}_{=0} +$$

$$(\vec{p}\cdot\nabla)\vec{r} + \underbrace{(\vec{r}\cdot\nabla)\vec{p}}_{=0}\Bigg] + (\vec{p}\cdot\vec{r})\left(-\frac{3\vec{r}}{r^5}\right) = \frac{1}{r^3}(\vec{p}\cdot\nabla)\vec{r} - \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} = \frac{\vec{p}}{r^3} -$$

$$\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5},$$

unde am ţinut cont de faptul că $\vec{p} = const.$ şi că

$$(\vec{p}\cdot\nabla)\vec{r} = \left(p_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(x_k\vec{u}_k) = p_i\delta_i\vec{u}_k = p_i\vec{u}_i = \vec{p}\,.$$

Atunci, în conformitate cu relaţia (4.2), intensitatea câmpului electrostatic creat de un dipol de moment $\vec{p}$, în vid, este dat de relaţia

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{E} = -grad\ V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}\right]. \qquad (4.3)$$

Ţinând seama de simetria problemei, pentru a găsi liniile de forţă vom lucra în coordonate sferice, luând axa polară de-a lungul lui $\vec{p}$. Proiectând vectorul $\vec{E}$ pe axele triedrului local, obţinem

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3},\quad E_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\sin\theta}{r^3},\quad E_\varphi = 0. \qquad (4.8)$$

Din ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de forţă, scrise în coordonate sferice

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r\,d\theta}{E_\theta} = \frac{r\sin\theta\,d\varphi}{E_\varphi},$$

prin integrare, rezultă

$$\frac{1}{r}dr = \frac{E_r}{E_\theta}d\theta = 2\cot\theta\,d\theta \;\Rightarrow\; \ln r = 2\ln|\sin\theta| + \ln C_1 \;\Rightarrow\; r = C_1\sin^2\theta$$

şi

$$d\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = C_2,$$

unde C_1 şi C_2 sunt constante arbitrare de integrare.

Problema nr. 5

O familie de suprafeţe care nu se intersectează are ecuaţia $u(x,y,z) = const.$ Ce condiţie trebuie să îndeplinească funcţia u, pentru ca suprafeţele familiei să poată fi suprafeţe echipotenţiale ale câmpului creat de un sistem de conductori?

Rezolvare

Pentru ca suprafeţele familiei $u(x,y,z) = const.$ să poată fi suprafeţe echipotenţiale ale câmpului creat de un sistem de conductori, potenţialul $V(x,y,z)$ trebuie să depindă de coordonate prin intermediul funcţiei $u(x,y,z)$. Prin urmare, trebuie să putem scrie

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$V(x,y,z)=f(u) \tag{5.1}$$

şi, totodată, trebuie ca potenţialul $V(x,y,z)$ să verifice ecuaţia Laplace

$$\Delta V(x,y,z)=0. \tag{5.2}$$

Ţinând seama de relaţia (5.1), rezultă

$$\nabla V=f'(u)\,\nabla u, \tag{5.3}$$

şi

$$\Delta V=(\nabla\cdot\nabla)V=\nabla\cdot(\nabla V)=\nabla\cdot\big(f'(u)\,\nabla u\big)=f'(u)\,\nabla\cdot(\nabla u)+$$
$$(\nabla u)\cdot\nabla f'(u)=f'(u)(\nabla\cdot\nabla)u+f''(u)(\nabla u)\cdot(\nabla u)=f'(u)\,\Delta u+f''(u)(\nabla u)^2. \tag{5.4}$$

Atunci, din (5.2) şi (5.4) urmează că

$$\frac{\Delta u}{(\nabla u)^2}=-\frac{f''(u)}{f'(u)}=-\frac{d}{du}\big[\ln f'(u)\big]=F(u), \tag{5.5}$$

unde $F(u)\equiv\dfrac{\Delta u}{(\nabla u)^2}$. De aici, prin integrare, se obţine potenţialul căutat.

Într-adevăr, avem

$$-d\big[\ln f'(u)\big]=F(u)\,du \;\Rightarrow\; \ln f'(u)=-\int F(u)\,du+\ln A \;\Rightarrow$$
$$f'(u)=Ae^{-\int F(u)\,du} \;\Rightarrow\; f(u)\big[=V(x,y,z)\big]=\int f'(u)\,du=$$
$$A\int e^{-\int F(u)\,du}du+B, \tag{5.6}$$

unde A şi B sunt constante arbitrare de integrare.

Problema nr. 6

Să se arate că tensorul moment electric cuadrupolar al unei distribuţii omogene de sarcină cu simetrie axială are o singură componentă esenţial distinctă şi să se calculeze potenţialul sistemului.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

Geometria problemei sugerează introducerea coordonatelor cilindrice ρ, φ şi z. Alegând axa Oz ca axă de simetrie şi observând că densitatea de sarcină electrică nu depinde de unghiul φ: $\rho^e = \rho^e(\rho, z)$, avem prin definiţie

$$p_{ik} = \int \rho^e(\rho, z)(3x_i x_k - r^2 \delta_{ik})\, d\tau . \qquad (6.1)$$

Calculând cele şase componente ale tensorului (simetric) p_{ik}, obţinem pentru componentele nediagonale

$$p_{12} = p_{xy} = 3\int \rho^e(\rho, z)\rho^3 d\rho\, dz \int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi = 0 ;$$

$$p_{23} = p_{yz} = 3\int \rho^e(\rho, z)\rho^2 z\, d\rho\, dz \int_0^{2\pi} \sin\varphi\, d\varphi = 0 ;$$

$$p_{31} = p_{zx} = 3\int \rho^e(\rho, z)\rho^2 z\, d\rho\, dz \int_0^{2\pi} \cos\, d\varphi = 0 ,$$

iar pentru cele diagonale (în care ţinem seama că $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $r^2 = \rho^2 + z^2$)

$$p_{33} = p_{zz} = 2\pi\int \rho^e(\rho, z)\left(2z^2 - \rho^2\right)\rho\, d\rho\, dz = p;$$

$$p_{11} = p_{xx} = \int \rho^e(\rho, z)\left[3x^2 - \left(\rho^2 + z^2\right)\right]\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = -\pi\int \rho^e(\rho, z) \times$$

$$\left(2z^2 - \rho^2\right)\rho\, d\rho\, dz = -\frac{p}{2};$$

$$p_{22} = p_{yy} = \int \rho^e(\rho, z)\left[3y^2 - \left(\rho^2 + z^2\right)\right]\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = p_{xx} = -\frac{p}{2},$$

ceea ce finalizează cerinţa din enunţul problemei.

În mod evident

$$Tr(p_{ik}) = \sum_{i=1}^{3} p_{ii} = 0.$$

Potenţialul cuadrupolului se calculează utilizând relaţia (vezi cursul *Electrodinamică* – Ioan Mercheş, Daniel Radu, Editura universităţii „Al.I. Cuza", Iaşi, 2002)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$V^{(2)} = \frac{k_e}{6} p_{ik} \left(\frac{3x_i x_k}{r^5} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \right); \quad \left(k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \right). \tag{6.2}$$

Utilizând valorile de mai sus ale momentului electric cuadrupolar, avem

$$V^{(2)} = k_e \left[p_{11} \left(\frac{3x^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) + p_{22} \left(\frac{3y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) + p_{33} \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \right] =$$

$$k_e \frac{p}{6r^3} \left[\frac{3z^2}{r^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{x^2 + y^2}{r^2} \right) \right],$$

sau, dacă ţinem seama că $x^2 + y^2 = r^2 - z^2$, $z = r\cos\theta$,

$$V^{(2)} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_o} \frac{p}{r^3} P_2^{\,0}(\cos\theta), \tag{6.3}$$

unde

$$P_2^{\,0}(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

este polinomul Legendre de gradul doi şi ordinul zero.

Problema nr. 7

Se consideră o cutie paralelipipedică de dimensiuni a, b şi c, corespunzătoare celor trei axe, x, y şi respectiv z. Toate feţele cutiei sunt menţinute la potenţial nul, cu excepţia suprafeţei $z = c$, pe care potenţialul este $V = V(x, y)$. Să se determine potenţialul $V(x, y, z)$ în interiorul cutiei.

Rezolvare

Simetria specifică problemei impune considerarea unui reper cartezian. Fără a restrânge generalitatea problemei, vom considera că originea acestui reper coincide cu unul din colţurile cutiei, axele de coordonate fiind orientate de-a lungul muchiilor care „pleacă" din acest colţ (vezi figura 7). Potenţialul $V(x, y, z)$ căutat este soluţia ecuaţiei Laplace care, în coordonate carteziene, se scrie simplu

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0. \tag{7.1}$$

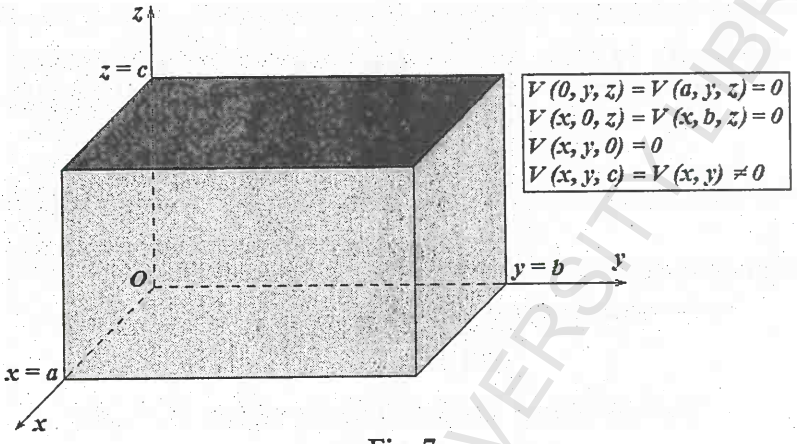


Fig. 7

Pentru rezolvarea acestei ecuații vom folosi metoda separării variabilelor, conform căreia soluția $V=V(x,y,z)$ trebuie căutată de forma

$$V(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z). \tag{7.2}$$

Conform „rețetei standard", se introduce (7.2) în (7.1) şi se împarte ecuația rezultată la $X(x)Y(y)Z(z)\equiv V(x,y,z)$. Se obține

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=0, \tag{7.3}$$

relație care nu poate fi satisfăcută decât dacă fiecare din cei trei termeni din membrul stâng este o constantă[1] (ce poate fi aleasă în mod convenabil), astfel încât suma algebrică a celor trei constante să fie nulă:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}=-\lambda^2; \tag{7.4}$$

$$\frac{1}{Y(y)}\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}=-\mu^2; \tag{7.5}$$

[1] Pe care, pentru simplitate, o vom presupune reală.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}=\chi^2, \tag{7.6}$$

cu

$$\chi^2=\lambda^2+\mu^2. \tag{7.7}$$

Soluțiile ecuațiilor (7.4) ÷ (7.6) au forma generală

$$X(x)=A_1e^{i\lambda x}+B_1e^{-i\lambda x}; \tag{7.8}$$

$$Y(y)=A_2e^{i\mu y}+B_2e^{-i\mu y}; \tag{7.9}$$

$$Z(z)=A_3e^{\chi z}+B_3e^{-\chi z}, \tag{7.10}$$

sau, echivalent,

$$X(x)=M_1\cos(\lambda x)+N_1\sin(\lambda x); \tag{7.11}$$

$$Y(y)=M_2\cos(\mu y)+N_2\sin(\mu y); \tag{7.12}$$

$$Z(z)=M_3\cosh(\chi z)+N_3\sinh(\chi z), \tag{7.13}$$

unde M_i şi N_i, $\left(i=\overline{1,3}\right)$ sunt constante arbitrare de integrare, determinabile din condițiile la limită. În primul rând, condițiile

$$V(0,\,y,\,z)\left[=X(0)Y(y)Z(z)\right]=0,\quad \left(\forall\, y\in[0,\,b],\, z\in[0,\,c]\right);$$

$$V(x,\,0,\,z)\left[=X(x)Y(0)Z(z)\right]=0,\quad \left(\forall\, x\in[0,\,a],\, z\in[0,\,c]\right);$$

$$V(x,\,y,\,0)\left[=X(x)Y(y)Z(0)\right]=0,\quad \left(\forall\, x\in[0,\,a],\, y\in[0,\,b]\right)$$

impun ca $M_i=0$, $\left(i=\overline{1,3}\right)$, astfel că funcțiile $X(x)$, $Y(y)$ şi $Z(z)$ capătă forma mai simplă

$$X(x)=N_1\sin(\lambda x); \tag{7.14}$$

$$Y(y)=N_2\sin(\mu y); \tag{7.15}$$

$$Z(z)=N_3\sinh(\chi z). \tag{7.16}$$

Apoi, din condițiile

$$V(a,\,y,\,z)=\left[X(a)Y(y)Z(z)\right]=0,\quad \left(\forall\, y\in[0,\,b],\, z\in[0,\,c]\right)$$

şi

$$V(x,\,b,\,z)=\left[X(x)Y(b)Z(z)\right]=0,\quad \left(\forall\, x\in[0,\,a],\, z\in[0,\,c]\right)$$

rezultă că λ şi μ trebuie să fie de forma

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\lambda \equiv \lambda_n = n\pi/a, \quad n \in \mathbb{Z}; \tag{7.17}$$

$$\mu \equiv \mu_m = m\,\pi/b, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{7.18}$$

Atunci, din (7.7) deducem că

$$\chi_{n\,m} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}, \quad (n,\, m \in \mathbb{Z}). \tag{7.19}$$

Având în vedere cele de mai sus, rezultă că potențialul $V = V(x, y, z)$ trebuie să se scrie sub forma unei serii duble de forma

$$V(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\lambda_n x)\sin(\mu_m y)\sinh(\chi_{nm} z), \tag{7.20}$$

unde setul de mărimi $A_{nm} = (N_1 N_2 N_3)_{nm}$ a rămas să fie determinat din condiția $V(x,y,c) = V(x,y)$ (care este dat/cunoscut):

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\lambda_n x)\sin(\mu_m y)\sinh(\chi_{nm} c). \tag{7.21}$$

Aceasta este o serie Fourier dublă pentru funcția cunoscută $V(x,y)$. Înmulțind relația (7.21) cu $\sin(\lambda_p x)\sin(\mu_q y)$ și integrând, rezultă

$$\int_0^a dx \int_0^b dy\; V(x,y)\sin(\lambda_p x)\sin(\mu_q y) = \int_0^a dx \int_0^b dy \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\sin(\lambda_n x)\sin(\mu_m y)\times$$

$$\sin(\lambda_p x)\sin(\mu_q y)\sinh(\chi_{nm} c) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\sinh(\chi_{nm} c)\int_0^a dx \int_0^b dy \sin(\lambda_n x)\times$$

$$\sin(\lambda_p x)\sin(\mu_m y)\sin(\mu_q y) = \frac{ab}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\sinh(\chi_{nm} c)\,\delta_{np}\delta_{mq} =$$

$$\frac{ab}{4}\sinh(\chi_{pq} c)\,A_{pq}, \tag{7.22}$$

unde am folosit relațiile de ortogonalitate

$$\int_0^a \sin(\lambda_m x)\sin(\lambda_n x)\,dx = \frac{a}{2}\delta_{mn};$$

$$\int_0^b \sin(\mu_m y)\sin(\mu_n y)\,dy = \frac{b}{2}\delta_{mn}.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Din (7.22) rezultă că

$$A_{pq}=\frac{4}{ab\sinh\left(\chi_{pq}c\right)}\int_0^a dx\int_0^b dy\ V(x,y)\sin\left(\lambda_p x\right)\sin\left(\mu_q y\right), \tag{7.23}$$

care, înlocuită în (7.20), conduce la soluția finală a problemei

$$V(x,y,z)=\frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\left(\lambda_n x\right)\sin\left(\mu_m y\right)\sinh\left(\chi_{nm}z\right)}{\sinh\left(\chi_{nm}c\right)}\times\right.$$
$$\left.\int_0^a dx\int_0^b dy\ V(x,y)\sin\left(\lambda_n x\right)\sin\left(\mu_m y\right)\right]. \tag{7.24}$$

În cazul particular când $V(x,y)=V_0=const.$, din (7.23) urmează că

$$A_{pq}=\frac{4}{ab\sinh\left(\chi_{pq}c\right)}\int_0^a dx\int_0^b dy\ V(x,y)\sin\left(\lambda_p x\right)\sin\left(\mu_q y\right)=\frac{4V_0}{ab\sinh\left(\chi_{pq}c\right)}\times$$
$$\int_0^a dx\int_0^b dy\sin\left(\lambda_p x\right)\sin\left(\mu_q y\right)=\frac{4V_0}{ab\sinh\left(\chi_{pq}c\right)}\frac{1}{\lambda_p\mu_q}\left[1-\cos\left(p\pi\right)\right]\times$$
$$\left[1-\cos\left(q\pi\right)\right]=\frac{4V_0}{pq\ \pi^2\sinh\left(\chi_{pq}c\right)}\times\begin{cases}4, & \text{dacă } p,\ q=2k+1, k\in\mathbb{Z},\\ 0, & \text{dacă } p,\ q=2k, \quad k\in\mathbb{Z},\end{cases}$$

și atunci, în acest caz particular,

$$V(x,y,z)=\frac{16\ V_0}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-1)^{-1}(2n-1)^{-1}}{\sinh\left(\chi_{n'm'}c\right)}\sin\left(\lambda_{n'}x\right)\sin\left(\mu_{m'}y\right)\sinh\left(\chi_{n'm'}z\right), \tag{7.25}$$

unde $n'=2n-1$ și $m'=2m-1$, $(m,\ n\in\mathbb{Z})$.

Problema nr. 8

Un fir rectiliniu infinit de secțiune neglijabilă, purtând sarcina electrică Λ pe unitatea de lungime, este așezat în interiorul unui tub metalic infinit, cu secțiunea dreptunghiulară $(0\le x\le a,\ 0\le y\le b)$. Fie x_0 și

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

y_0 coordonatele firului în planul secțiunii. Să se determine potențialul în secțiunea tubului, dacă pereții acestuia sunt legați la pământ.

Rezolvare

Considerăm, pentru început, că sarcina electrică a firului este distribuită uniform, într-o coloană prismatică foarte subțire, cu secțiunea dreptunghiulară, având fețele paralele cu pereții tubului (vezi figura 8.1).

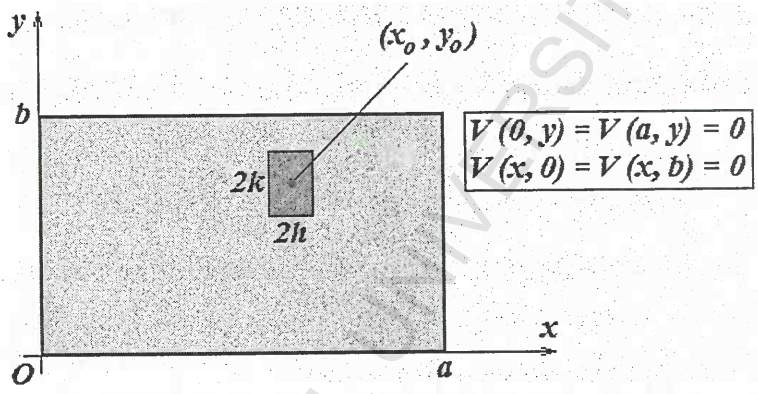


Fig. 8.1

Densitatea superficială de sarcină electrică în secțiunea tubului se va scrie astfel

$$\rho(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\Lambda}{4hk}, & \text{pentru } x_0-h<x<x_0+h,\quad y_0-k<y<y_0+k,\\ 0, & \text{pentru celelalte valori ale lui } x \text{ și } y.\end{cases} \tag{8.1}$$

Evident, pentru a obține rezultatul problemei, la momentul oportun vom trece la limită, făcând pe h și k să tindă către zero. Cunoscând densitatea de sarcină electrică distribuită în secțiunea transversală a tubului, problema revine la a integra ecuația lui Poisson în planul secțiunii

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,y), \tag{8.2}$$

cu condițiile la limită

$$\begin{cases} V(0,y)=V(a,y)=0, \\ V(x,0)=V(x,b)=0. \end{cases} \tag{8.3}$$

Condițiile la limită (10.3) sugerează căutarea unei soluții pentru ecuația (8.2) de forma

$$V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \tag{8.4}$$

deoarece, în acest fel, condiția $V=0$ pentru $y=0$ și $y=b$ (indiferent de valorile pe care le poate lua variabila x) este automat satisfăcută.

Impunând ca soluția dată de relația (8.4) să verifice ecuația (8.2), obținem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n''(x)-\frac{n^2\pi^2}{b^2}u_n(x)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,y). \tag{8.5}$$

Având în vedere relația de ortogonalitate

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy=\frac{b}{2}\delta_{mn},$$

din (8.5) rezultă următoarea ecuație diferențială ordinară pentru funcțiile $u_n(x)$:

$$u_n''(x)-\frac{n^2\pi^2}{b^2}u_n(x)=-\frac{2}{b\varepsilon_0}\int_0^b \rho(x,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)d\eta, \tag{8.6}$$

a cărei soluție generală poate fi obținută prin metoda variației constantelor. Ecuația omogenă ataşată ecuației neomogene (8.6) este

$$\frac{d^2u_n}{dx^2}-\frac{n^2\pi^2}{b^2}u_n=0$$

şi (întrucât soluțiile ecuației caracteristice ataşate acesteia sunt reale) are următorul sistem fundamental de soluții

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} u_n^{(1)} = \sinh\left(\dfrac{n\pi}{b}x\right), \\ u_n^{(2)} = \cosh\left(\dfrac{n\pi}{b}x\right). \end{cases}$$

Conform metodei variației constantelor, soluția generală a ecuației neomogene va fi atunci

$$u_n(x) = u_n^{(1)} \int A_n'(x)dx + u_n^{(2)} \int B_n'(x)dx, \tag{8.7}$$

unde $A_n'(x)$ şi $B_n'(x)$ sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} u_n^{(1)}(x)A_n'(x) + u_n^{(2)}(x)B_n'(x) = 0, \\ \dfrac{du_n^{(1)}}{dx}A_n'(x) + \dfrac{du_n^{(2)}}{dx}B_n'(x) = -\dfrac{2}{b\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^b \rho(x,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)d\eta, \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} \sinh\left(\dfrac{n\pi}{b}x\right)A_n'(x) + \cosh\left(\dfrac{n\pi}{b}x\right)B_n'(x) = 0, \\ \dfrac{n\pi}{b}\cosh\left(\dfrac{n\pi}{b}x\right)A_n'(x) + \dfrac{n\pi}{b}\sinh\left(\dfrac{n\pi}{b}x\right)B_n'(x) = \\ \qquad -\dfrac{2}{b\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^b \rho(x,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)d\eta. \end{cases}$$

Din prima ecuație a acestui sistem rezultă că

$$B_n'(x) = -A_n'(x)\tanh\left(\frac{n\pi}{b}x\right),$$

care, introdusă în cea de a doua ecuație a aceluiaşi sistem, conduce la

$$\frac{n\pi}{b}A_n'(x) = -\frac{2}{b\varepsilon_0}\cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\int_0^b \rho(x,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)d\eta, \tag{8.8}$$

unde s-a ținut cont de identitatea din trigonometria funcțiilor hiperbolice: $\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = 1, \quad \forall\psi \in \mathbb{R}$. Din (8.8) rezultă imediat

$$A_n'(x) = -\frac{2}{n\pi\varepsilon_0}\cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\int_0^b \rho(x,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)d\eta,$$

de unde

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$A_n(x)=\int A_n'(x)dx=-\frac{2}{n\pi\varepsilon_0}\int\left[\int_0^b\rho(x,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)d\eta\right]\cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)dx+\mathcal{A}_n,$$

unde $\mathcal{A}_n$ sunt constante veritabile, arbitrare, de integrare. Atunci

$$B_n'(x)=-A_n'(x)\tanh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)=\frac{2}{n\pi\varepsilon_0}\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\int_0^b\rho(x,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)d\eta, \tag{8.9}$$

de unde

$$B_n(x)=\int B_n'(x)dx=\frac{2}{n\pi\varepsilon_0}\int\left[\int_0^b\rho(x,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)d\eta\right]\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)dx+\mathcal{B}_n,$$

unde $\mathcal{B}_n$ sunt, de asemenea, constante veritabile, arbitrare, de integrare. Atât $\mathcal{A}_n$, cât şi $\mathcal{B}_n$, se determină din condiţiile la limită pentru $u_n(x)$: $u_n(0)=0$ şi $u_n(a)=0$.

Cu $\int A_n'(x)dx$ şi $\int B_n'(x)dx$ astfel determinate în (8.7), rezultă următoarea expresie pentru soluţia generală a ecuaţiei (8.6):

$$u_n(x)=u_n^{(1)}\int A_n'(x)dx+u_n^{(2)}\int B_n'(x)dx=$$

$$\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\left[-\frac{2}{n\pi\varepsilon_0}\int\left[\int_0^b\rho(x,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)d\eta\right]\cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)dx+\mathcal{A}_n\right]+$$

$$\cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\left[\frac{2}{n\pi\varepsilon_0}\int\left[\int_0^b\rho(x,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)d\eta\right]\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)dx+\mathcal{B}_n\right]=$$

$$\mathcal{A}_n\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)+\mathcal{B}_n\cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)-\frac{2}{n\pi\varepsilon_0}\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\int_0^x\int_0^b\rho(\xi,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)\times$$

$$\cosh\left(\frac{n\pi}{b}\xi\right)d\xi d\eta+\frac{2}{n\pi\varepsilon_0}\cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\int_0^x\int_0^b\rho(\xi,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{b}\xi\right)\times$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$d\xi d\eta = \mathcal{A}_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \mathcal{B}_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) - \frac{2}{n\pi\varepsilon_0}\int_0^x\int_0^b \rho(\xi,\eta)\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)\times$$

$$\left[\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{b}\xi\right) - \sinh\left(\frac{n\pi}{b}\xi\right)\cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\right]d\xi d\eta =$$

$$\mathcal{A}_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + \mathcal{B}_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right) - \frac{2}{n\pi\varepsilon_0}\int_0^x\int_0^b \rho(\xi,\eta)\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-\xi)\right]\times$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)d\xi d\eta \,. \tag{8.10}$$

Pentru $x < x_0$, ultimul termen se anulează în urma trecerii la limită [putem presupune h suficient de mic pentru ca $x < x_0 - h$ şi atunci $\rho = 0$, în conformitate cu relaţia (8.1)].

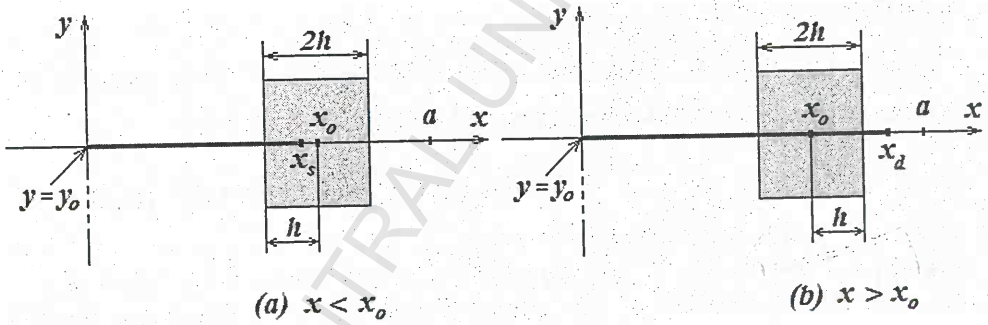


Fig. 8.2

Într-adevăr, pentru $x < x_0$ [deci x situat la stânga lui x_0 – vezi figura 8.2 (a)] orice valoare ar lua x, cu $x < x_0$ (adică, oricât ar fi de lung segmentul de lungime x_s, care nu poate fi mai mare decât x_0), atunci când se trece la limita $h \to 0$, întotdeauna x_s va rămâne în afara dreptunghiului de lăţime $2h$ [să nu uităm că integrarea se face de la 0 la $x < x_0$ (adică, mai exact, de la 0 la x_s) şi, când dreptunghiul se îngustează ca urmare a

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

trecerii la limită, x_s va rămâne în afara dreptunghiului, indiferent cât de mare este $x_s < x_0$].

Din contra, pentru $x > x_0$, oricât de lung ar fi segmentul „pe care se face integrarea" după x (oricât de mare ar fi $x_d < a$), atunci când se trece la limita $h \to 0$ (atunci când dreptunghiul se îngustează din ce în ce mai mult, până când, la limită devine segmentul de dreaptă de ecuație $x = x_0$, de lungime $2k$ și orientat perpendicular pe axa Ox) totdeauna va exista un mic dreptunghi de lățime $2h$ și înălțime $2k$ pentru care $\rho(\xi,\eta) = \frac{\Lambda}{4hk} \neq 0$ și care să fie cuprins în interiorul intervalului de integrare. Altfel spus, $\forall x_d$ cu $x_0 < x_d < a$, $\exists h < x_d - x_0 \neq 0$. Atunci, pentru $x > x_0$, presupunând h suficient de mic pentru ca $x_0 + h < x$ și ținând seama de (8.1), avem

$$I(h,k) \equiv \int_0^x \int_0^b \rho(\xi,\eta) \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-\xi)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right) d\xi\, d\eta = \frac{\Lambda}{4hk} \times$$

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} \int_{y_0-k}^{y_0+k} \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-\xi)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right) d\xi\, d\eta = \frac{\Lambda}{4hk} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-\xi)\right] d\xi \times$$

$$\int_{y_0-k}^{y_0+k} \sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right) d\eta = \frac{\Lambda}{4hk} \frac{b^2}{(n\pi)^2} \left\{-\cosh\left[\frac{n\pi}{b}(x-\xi)\right]\right\}_{x_0-h}^{x_0+h} \times$$

$$\left[-\cos\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right)\right]_{y_0-k}^{y_0+k} = \frac{\Lambda b^2}{4hk(n\pi)^2} \left\{\cosh\left[\frac{n\pi}{b}(x-x_0+h)\right] - \right.$$

$$\left. \cosh\left[\frac{n\pi}{b}(x-x_0-h)\right]\right\} \left\{\cos\left[\frac{n\pi}{b}(y_0-k)\right] - \cos\left[\frac{n\pi}{b}(y_0+k)\right]\right\}. \tag{8.11}$$

Trecând la limita $(h,\ k) \to 0$ în relația (8.11), obținem

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ k\to 0}} I(h,k) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ k\to 0}} \int_0^x \int_0^b \rho(\xi,\eta) \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-\xi)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{b}\eta\right) d\xi\, d\eta =$$

BCUIAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\left(\frac{\Lambda b^2}{4hk(n\pi)^2}\left\{\cosh\left[\frac{n\pi}{b}(x-x_0+h)\right]-\cosh\left[\frac{n\pi}{b}(x-x_0-h)\right]\right\}\times\right.$$

$$\left.\left\{\cos\left[\frac{n\pi}{b}(y_0-k)\right]-\cos\left[\frac{n\pi}{b}(y_0+k)\right]\right\}\right)=\frac{\Lambda b^2}{4(n\pi)^2}\times$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cosh\left[\frac{n\pi}{b}(x-x_0+h)\right]-\cosh\left[\frac{n\pi}{b}(x-x_0-h)\right]}{h}\times$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{\cos\left[\frac{n\pi}{b}(y_0-k)\right]-\cos\left[\frac{n\pi}{b}(y_0+k)\right]}{k}=\frac{\Lambda b^2}{4(n\pi)^2}\times$$

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{2\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-x_0)\right]\sinh\left(\frac{n\pi}{b}h\right)}{h}\right)\left(\lim_{k\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{n\pi}{b}y_0\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}k\right)}{k}\right)=$$

$$\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-x_0)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y_0\right)\left[\lim_{h\to 0}\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{b}h\right)}{h}\right]\left[\lim_{k\to 0}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{b}k\right)}{k}\right]\times$$

$$\frac{\Lambda b^2}{(n\pi)^2}=\frac{\Lambda b^2}{(n\pi)^2}\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-x_0)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y_0\right)\left[\frac{n\pi}{b}\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{b}h\right)}{\frac{n\pi}{b}h}}_{=1}\right]\times$$

$$\left[\frac{n\pi}{b}\underbrace{\lim_{k\to 0}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{b}k\right)}{\frac{n\pi}{b}k}}_{=1}\right]=\Lambda\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-x_0)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y_0\right).$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Atunci $u_n(x)$ va fi dat de formula

$$u_n(x)=\mathcal{A}_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)+\mathcal{B}_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)+$$

$$\begin{cases}0, & \text{pentru } x<x_0, \\ -\dfrac{2\Lambda}{n\pi\varepsilon_0}\sinh\left[\dfrac{n\pi}{b}(x-x_0)\right]\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y_0\right), & \text{pentru } x>x_0. \end{cases} \quad (8.12)$$

Condiția $u_n(0)=0$ dă $\mathcal{B}_n=0$, iar condiția $u_n(a)=0$ conduce la

$$\mathcal{A}_n=\frac{2\Lambda}{n\pi\varepsilon_0}\frac{\sinh\left[\dfrac{n\pi}{b}(a-x_0)\right]\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y_0\right)}{\sinh\left(\dfrac{n\pi a}{b}\right)}. \quad (8.13)$$

Cu $\mathcal{A}_n$ și $\mathcal{B}_n$ astfel determinate în (8.12), rezultă expresia finală a lui $u_n(x)$ care, introdusă în relația (8.4), dă rezultatul problemei [soluția ecuației (8.2)], adică

$$V(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2\Lambda}{\pi\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\left[\dfrac{n\pi}{b}(a-x_0)\right]\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y_0\right)}{n\sinh\left(\dfrac{n\pi a}{b}\right)}\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pentru } x<x_0, \\ \dfrac{2\Lambda}{\pi\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\left[\dfrac{n\pi}{b}(a-x_0)\right]\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y_0\right)}{n\sinh\left(\dfrac{n\pi a}{b}\right)}\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)- \\ -\dfrac{2\Lambda}{\pi\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\left[\dfrac{n\pi}{b}(x-x_0)\right]\sin\left(\dfrac{n\pi}{b}y_0\right)}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pentru } x>x_0, \end{cases}$$

sau, dacă în expresia lui $V(x,y)$ pentru $x>x_0$ se ține cont de identitatea

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\sinh(\alpha-\beta)\sinh(\gamma)+\sinh(\beta-\gamma)\sinh(\alpha)+\sinh(\gamma-\alpha)\sinh(\beta)=0,$$
$$(\forall\ \alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}),\tag{8.14}$$

în care $\alpha=\frac{n\pi}{b}a$, $\beta=\frac{n\pi}{b}x_0$ şi $\gamma=\frac{n\pi}{b}x$, atunci se poate scrie mai simplu

$$V(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{2\Lambda}{\pi\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x_0)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y_0\right)}{n\ \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), & \text{pentru } x<x_0,\\[2ex] \dfrac{2\Lambda}{\pi\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x_0\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y_0\right)}{n\ \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}\sinh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), & \text{pentru } x>x_0\ .\end{cases}\tag{8.15}$$

Problema nr. 9

O sarcină electrică punctiformă, q, este aşezată în punctul P_0 de coordonate $P_0(x_0, y_0, z_0)$ aflat în interiorul unei cutii paralelipipedice $(0\le x\le a,\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c)$, cu pereţi conductori, legaţi la pământ. Să se determine potenţialul electrostatic în interiorul cutiei.

Rezolvare

Pentru a evita lucrul – mult mai dificil, de altfel – cu distribuţia implicată de exprimarea matematică exactă a densităţii volumice de sarcină electrică a unei distribuţii alcătuită dintr-o singură sarcină electrică puncti-

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

formă, vom considera pentru început că sarcina electrică q este distribuită uniform într-un mic paralelipiped, având feţele paralele cu pereţii cutiei, urmând ca apoi să trecem la limita când volumul acestui mic paralelipiped tinde la zero. În această situaţie, densitatea de sarcină electrică va fi (vezi figura 9)

$$\rho(x,y,z)=$$
$$\begin{cases} \dfrac{q}{8hkl}, \text{ pentru } x_0-h<x<x_0+h,\ y_0-k<y<y_0+k,\ z_0-l<z<z_0+l, \\ 0, \quad \text{pentru celelalte valori ale lui } x,\ y \text{ şi } z, \end{cases} \tag{9.1}$$

iar potenţialul câmpului electrostatic în interiorul cutiei rezultă atunci ca soluţie a ecuaţiei lui Poisson

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,y,z), \tag{9.2}$$

cu condiţiile la limită

$$\begin{cases} V(0,y,z)=V(a,y,z)=0, & \forall\, y,\ z \text{ în interiorul cutiei}, \\ V(x,0,y)=V(x,b,y)=0, & \forall\, x,\ z \text{ în interiorul cutiei}, \\ V(x,y,0)=V(x,y,c)=0, & \forall\, x,\ y \text{ în interiorul cutiei}, \end{cases}$$

unde s-a ţinut cont de faptul că simetria problemei este una rectangulară, deci s-a utilizat expresia laplaceanului în coordonate carteziene.

Având în vedere condiţiile la limită de mai sus, soluţia ecuaţiei (9.2) se caută de forma

$$V(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(x)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right), \tag{9.3}$$

care asigură automat anularea potenţialului pe pereţii $y=0$, $y=b$, $z=0$ şi $z=c$. Impunând ca potenţialul dat de relaţia (9.3) să verifice ecuaţia (9.2), rezultă

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d^2u_{mn}(x)}{dx^2}-\alpha_{mn}^2u_{mn}(x)\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(x,y,z), \tag{9.4}$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

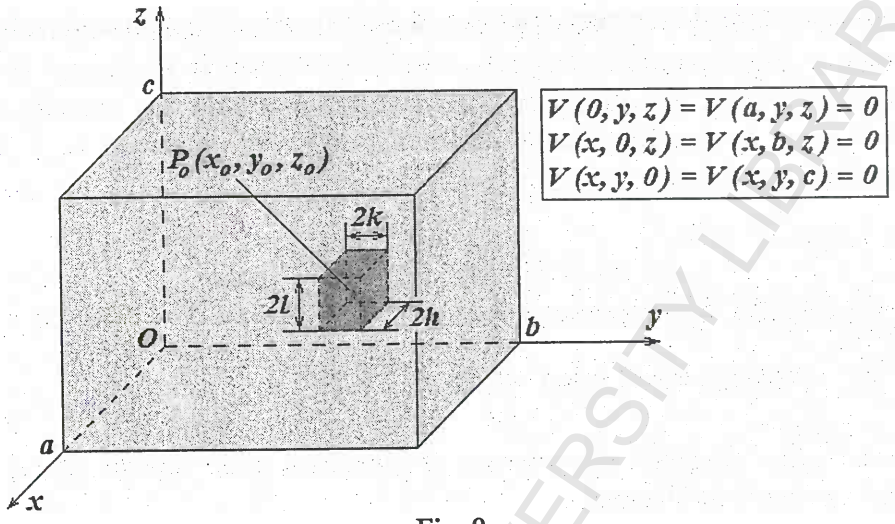


Fig. 9

unde $\alpha_{mn} = \pi\sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}}$. Ţinând cont de relaţiile de ortogonalitate

$$\int_0^b \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy = \frac{b}{2}\delta_{mn}$$

şi

$$\int_0^c \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)\sin\left(\frac{m\pi}{c}z\right)dz = \frac{c}{2}\delta_{mn},$$

din (9.4) urmează simplu că

$$\frac{d^2u_{mn}(x)}{dx^2} - \alpha_{mn}^2 u_{mn}(x) = -\frac{4}{bc\varepsilon_0}\int_0^b\int_0^c \rho(x,\eta,\zeta)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)d\eta d\zeta. \tag{9.5}$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii poate fi obţinută prin metoda variaţiei constantelor. Ecuaţia caracteristică ataşată ecuaţiei omogene corespunzătoare ecuaţiei neomogene (9.5) are soluţiile $r_{1,2} = \pm\alpha_{mn}$, deci sistemul fundamental de soluţii ale ecuaţiei omogene va fi

$$\begin{cases} u_{mn}^{(1)} = \sinh(\alpha_{mn}x), \\ u_{mn}^{(2)} = \cosh(\alpha_{mn}x). \end{cases}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În acest caz, conform metodei variației constantelor, soluția generală a ecuației neomogene va fi dată de

$$u_{mn}(x)=u_{mn}^{(1)}\int A_{mn}^{'}(x)dx+u_{mn}^{(2)}\int B_{mn}^{'}(x)dx, \tag{9.6}$$

unde $A_{mn}^{'}(x)$ şi $B_{mn}^{'}(x)$ sunt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} u_{mn}^{(1)}(x)A_{mn}^{'}(x)+u_{mn}^{(2)}(x)B_{mn}^{'}(x)=0, \\ \dfrac{du_{mn}^{(1)}}{dx}A_{mn}^{'}(x)+\dfrac{du_{mn}^{(2)}}{dx}B_{mn}^{'}(x)=-\dfrac{4}{bc\varepsilon_0}\int_0^b\int_0^c\rho(x,\eta,\zeta)\sin\left(\dfrac{m\pi}{b}\eta\right)\times \\ \qquad\qquad \sin\left(\dfrac{n\pi}{c}\zeta\right)d\eta d\zeta , \end{cases}$$

adică

$$\begin{cases} \sinh(\alpha_{mn}x)A_{mn}^{'}(x)+\cosh(\alpha_{mn}x)B_{mn}^{'}(x)=0 , \\ \alpha_{mn}\cosh(\alpha_{mn}x)A_{mn}^{'}(x)+\alpha_{mn}\sinh(\alpha_{mn}x)B_{mn}^{'}(x)=-\dfrac{4}{bc\varepsilon_0}\int_0^b\int_0^c\rho(x,\eta,\zeta)\times \\ \qquad\qquad \sin\left(\dfrac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{c}\zeta\right)d\eta d\zeta . \end{cases}$$

Din prima ecuație a acestui sistem rezultă că

$$B_{mn}^{'}(x)=-A_{mn}^{'}(x)\tanh(\alpha_{mn}x),$$

care, introdusă în cea de a doua ecuație a aceluiaşi sistem conduce la

$$\alpha_{mn}A_{mn}^{'}(x)=-\frac{4\cosh(\alpha_{mn}x)}{bc\varepsilon_0}\int_0^b\int_0^c\rho(x,\eta,\zeta)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)d\eta d\zeta , \tag{9.7}$$

unde s-a ținut cont de identitatea: $\cosh^2\psi-\sinh^2\psi=1,\ \forall\psi\in\mathbb{R}$. Din relația (9.7) rezultă imediat

$$A_{mn}(x)=\int A_{mn}^{'}(x)dx=-\int\left[\int_0^b\int_0^c\rho(x,\eta,\zeta)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)d\eta d\zeta\right]\times$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{4}{\alpha_{mn} bc\varepsilon_0}\cosh(\alpha_{mn}x)\,dx+\mathcal{A}_{mn}\ , \tag{9.8}$$

unde $\mathcal{A}_{mn}$ sunt constante veritabile, arbitrare, de integrare. Atunci

$$B'_{mn}(x)=-A'_{mn}(x)\tanh(\alpha_{mn}x)=\frac{4\sinh(\alpha_{mn}x)}{\alpha_{mn}bc\varepsilon_0}\times$$

$$\int_0^b\int_0^c\rho(x,\eta,\zeta)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)d\eta d\zeta\ , \tag{9.9}$$

de unde

$$B_{mn}(x)=\int B'_{mn}(x)dx=\int\left[\int_0^b\int_0^c\rho(x,\eta,\zeta)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)d\eta d\zeta\right]\times$$

$$\frac{4}{\alpha_{mn}bc\varepsilon_0}\sinh(\alpha_{mn}x)\,dx+\mathcal{B}_{mn}\ , \tag{9.10}$$

unde $\mathcal{B}_{mn}$ sunt, de asemenea, constante veritabile, arbitrare, de integrare. Atât $\mathcal{A}_{mn}$, cât şi $\mathcal{B}_{mn}$, se determină din condiţiile la limită pentru $u_{mn}(x)$: $u_{mn}(0)=0$ şi $u_{mn}(a)=0$.

Cu $\int A'_{mn}(x)dx$ şi $\int B'_{mn}(x)dx$ astfel determinate în (9.6), rezultă următoarea expresie pentru soluţia generală a ecuaţiei (9.4):

$$u_{mn}(x)=u_{mn}^{(1)}\int A'_{mn}(x)dx+u_{mn}^{(2)}\int B'_{mn}(x)dx=\sinh(\alpha_{mn}x)\times$$

$$\left\{-\frac{4}{\alpha_{mn}bc\varepsilon_0}\int\left[\int_0^b\int_0^c\rho(x,\eta,\zeta)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)d\eta d\zeta\right]\cosh(\alpha_{mn}x)\,dx+\right.$$

$$\left.\mathcal{A}_{mn}\right\}+\cosh(\alpha_{mn}x)\left\{\frac{4\alpha_{mn}^{-1}}{bc\varepsilon_0}\int\left[\int_0^b\int_0^c\rho(x,\eta,\zeta)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)d\eta d\zeta\right]\times\right.$$

$$\left.\sinh(\alpha_{mn}x)\,dx+\mathcal{B}_{mn}\right\}=\mathcal{A}_{mn}\sinh(\alpha_{mn}x)+\mathcal{B}_{mn}\cosh(\alpha_{mn}x)-\frac{4\sinh(\alpha_{mn}x)}{\alpha_{mn}bc\varepsilon_0}\times$$

$$\int_0^x\int_0^b\int_0^c\rho(\xi,\eta,\zeta)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)\cosh(\alpha_{mn}\xi)\,d\xi d\eta d\zeta+\frac{\cosh(\alpha_{mn}x)}{4^{-1}\alpha_{mn}bc\varepsilon_0}\times$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int_0^x\int_0^b\int_0^c \rho(\xi,\eta,\zeta)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)\sinh(\alpha_{mn}\xi)\,d\xi d\eta d\zeta =$$

$$\mathcal{A}_{mn}\sinh(\alpha_{mn}x)+\mathcal{B}_{mn}\cosh(\alpha_{mn}x)-\frac{4}{\alpha_{mn}bc\varepsilon_0}\int_0^x\int_0^b\int_0^c \rho(\xi,\eta,\zeta)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\times$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)\left[\sinh(\alpha_{mn}x)\cosh(\alpha_{mn}\xi)-\cosh(\alpha_{mn}x)\sinh(\alpha_{mn}\xi)\right]d\xi d\eta d\zeta =$$

$$\mathcal{A}_{mn}\sinh(\alpha_{mn}x)+\mathcal{B}_{mn}\cosh(\alpha_{mn}x)-\frac{4}{\alpha_{mn}bc\varepsilon_0}\int_0^x\int_0^b\int_0^c \rho(\xi,\eta,\zeta)\times$$

$$\sinh\left[\alpha_{mn}(x-\xi)\right]\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)d\xi d\eta d\zeta \tag{9.11}$$

Pentru $x<x_0$, ultimul termen se anulează în urma trecerii la limită [putem presupune h suficient de mic pentru ca $x<x_0-h$ şi atunci $\rho=0$, în conformitate cu relaţia (9.1); pentru o justificare mai amănunţită, vezi problema precedentă], iar pentru $x>x_0$, având în vedere relaţia (9.1), putem scrie

$$I(h,k,l)\equiv\int_0^x\int_0^b\int_0^c \rho(\xi,\eta,\zeta)\sinh\left[\alpha_{mn}(x-\xi)\right]\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)d\xi d\eta\times$$

$$d\zeta=\frac{q}{8hkl}\int_{x_0-h}^{x_0+h}\int_{y_0-k}^{y_0+k}\int_{z_0-l}^{z_0+l}\sinh\left[\alpha_{mn}(x-\xi)\right]\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)d\xi\times$$

$$d\eta d\zeta=\frac{q}{8hkl}\int_{x_0-h}^{x_0+h}\sinh\left[\alpha_{mn}(x-\xi)\right]d\xi\int_{y_0-k}^{y_0+k}\sin\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)d\eta\int_{z_0-l}^{z_0+l}\sin\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)d\zeta =$$

$$\frac{-q}{8hkl}\frac{bc\pi^{-2}}{mn\alpha_{mn}}\left\{\cosh\left[\alpha_{mn}(x-\xi)\right]\right\}_{x_0-h}^{x_0+h}\left[\cos\left(\frac{m\pi}{b}\eta\right)\right]_{y_0-k}^{y_0+k}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{c}\zeta\right)\right]_{z_0-l}^{z_0+l}=$$

$$=\frac{qbc\,\pi^{-2}\alpha_{mn}^{-1}}{8hklmn}\left\{\cosh\left[\alpha_{mn}(x-x_0+h)\right]-\cosh\left[\alpha_{mn}(x-x_0-h)\right]\right\}\left\{\cos\left[\frac{m\pi}{b}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.(y_0+k)\right]-\cos\left[\frac{m\pi}{b}(y_0-k)\right]\right\}\left\{\cos\left[\frac{n\pi}{c}(z_0+l)\right]-\cos\left[\frac{n\pi}{c}(z_0-l)\right]\right\}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi atunci

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0\\ l\to 0}} I(h,k,l)=\frac{qbc\alpha_{mn}^{-1}}{\pi^2 mn}\sinh\left[\alpha_{mn}(x-x_0)\right]\sin\left(\frac{m\pi}{b}y_0\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z_0\right)\times$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sinh(\alpha_{mn}h)}{h}\lim_{k\to 0}\frac{\sin\left(\frac{m\pi}{b}k\right)}{k}\lim_{l\to 0}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{c}l\right)}{l}=q\sinh\left[\alpha_{mn}(x-x_0)\right]\times$$

$$\sin\left(\frac{m\pi}{b}y_0\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z_0\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sinh(\alpha_{mn}h)}{\alpha_{mn}h}\lim_{k\to 0}\frac{\sin\left(\frac{m\pi}{b}k\right)}{\frac{m\pi}{b}k}\lim_{l\to 0}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{c}l\right)}{\frac{n\pi}{c}l}=$$

$$q\sinh\left[\alpha_{mn}(x-x_0)\right]\sin\left(\frac{m\pi}{b}y_0\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z_0\right).$$

Aşadar, în urma integrării şi a trecerii la limită, pentru funcţiile $u_{mn}(x)$ se obţine expresia

$$u_{mn}(x)=\mathcal{A}_{mn}\sinh(\alpha_{mn}x)+\mathcal{B}_{mn}\cosh(\alpha_{mn}x)+$$

$$\begin{cases}0, & \text{pentru } x<x_0,\\ -\dfrac{4q\alpha_{mn}^{-1}}{bc\varepsilon_0}\sinh\left[\alpha_{mn}(x-x_0)\right]\sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y_0\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{c}z_0\right), & \text{pentru } x>x_0.\end{cases} \tag{9.12}$$

Condiţia $u_{mn}(0)=0$ dă $\mathcal{B}_{mn}=0$, iar condiţia $u_{mn}(a)=0$ conduce la

$$\mathcal{A}_{mn}=\frac{4q}{\alpha_{mn}bc\varepsilon_0}\frac{\sinh\left[\alpha_{mn}(a-x_0)\right]\sin\left(\frac{m\pi}{b}y_0\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z_0\right)}{\sinh(\alpha_{mn}a)}. \tag{9.13}$$

Cu $\mathcal{A}_{mn}$ şi $\mathcal{B}_{mn}$ astfel determinate în (9.12) rezultă expresia finală a funcţiilor $u_{mn}(x)$ care, introduse în relaţia (9.3), conduc la rezultatul problemei [soluţia ecuaţiei (9.2)], adică

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$V(x,\,y,\,z)=$$

$$\begin{cases}
\dfrac{4q}{bc\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sinh\left[\alpha_{mn}(a-x_0)\right]\sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y_0\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{c}z_0\right)}{\alpha_{mn}\sinh(\alpha_{mn}a)}\sinh(\alpha_{mn}x)\times \\
\qquad\qquad \sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{c}z\right),\quad \text{pentru } x<x_0, \\
\dfrac{4q}{bc\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sinh\left[\alpha_{mn}(a-x_0)\right]\sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y_0\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{c}z_0\right)}{\alpha_{mn}\sinh(\alpha_{mn}a)}\sinh(\alpha_{mn}x)\times \\
\sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{c}z\right)-\dfrac{4q}{bc\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sinh\left[\alpha_{mn}(x-x_0)\right]}{\alpha_{mn}}\sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y_0\right)\times \\
\qquad\qquad \sin\left(\dfrac{n\pi}{c}z_0\right)\sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{c}z\right),\quad \text{pentru } x>x_0,
\end{cases}$$

sau, mai simplu

$$V(x,\,y,\,z)=$$

$$\begin{cases}
\dfrac{4q}{bc\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sinh\left[\alpha_{mn}(a-x_0)\right]\sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y_0\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{c}z_0\right)}{\alpha_{mn}\sinh(\alpha_{mn}a)}\sinh(\alpha_{mn}x)\times \\
\qquad\qquad \sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{c}z\right),\quad \text{pentru } x<x_0, \\
\dfrac{4q}{bc\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sinh(\alpha_{mn}x_0)\sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y_0\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{c}z_0\right)}{\alpha_{mn}\sinh(\alpha_{mn}a)}\sinh\left[\alpha_{mn}(a-x)\right]\times \\
\qquad\qquad \sin\left(\dfrac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\dfrac{n\pi}{c}z\right),\quad \text{pentru } x>x_0,
\end{cases}$$

(9.14)

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde, în expresia lui $V(x, y, z)$ pentru $x > x_0$, s-a ținut cont de identitatea: $\sinh(\alpha-\beta)\ \sinh\gamma + \sinh(\beta-\gamma)\ \sinh\alpha + \sinh(\gamma-\alpha)\ \sinh\beta = 0$, $(\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$, scrisă pentru $\alpha = \alpha_{mn}a$, $\beta = \alpha_{mn}x_0$ și $\gamma = \alpha_{mn}x$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

II. MAGNETOSTATICĂ

Problema nr. 10

Să se arate că un câmp magnetostatic uniform, $\vec{B}_0$, admite potențialul vector: $\vec{A}=\frac{1}{2}\vec{B}_0\times\vec{r}$.

Rezolvare

Metoda 1: calcul direct. Avem

$$\nabla\times\vec{A}=\frac{1}{2}\nabla\times\left(\vec{B}_0\times\vec{r}\right)=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\vec{B}_0\times\vec{r}\right)_k\vec{u}_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\partial_j\left(\varepsilon_{klm}B_{0l}x_m\right)\vec{u}_i=$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}B_{0l}\left(\partial_j x_m\right)\vec{u}_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}B_{0l}\,\delta_{jm}\,\vec{u}_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{imk}\varepsilon_{klm}B_{0l}\vec{u}_i=$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{imk}\varepsilon_{lmk}B_{0l}\vec{u}_i=\frac{1}{2}2\delta_{il}B_{0l}\vec{u}_i=B_{0i}\vec{u}_i=\vec{B}_0\ ,$$

unde s-a avut în vedere faptul că, deoarece $\vec{B}_0$ este un câmp magnetostatic, $B_{0i}=const.$, $\left(\forall\, i=\overline{1,3}\right)$.

Metoda 2: utilizând identitatea (B.44) din Anexa B. În acest caz, avem

$$\nabla\times\vec{A}=\nabla\times\left(\frac{1}{2}\vec{B}_0\times\vec{r}\right)=\frac{1}{2}\nabla\times\left(\vec{B}_0\times\vec{r}\right)=\frac{1}{2}\Big[\vec{B}_0\ \nabla\cdot\vec{r}-\vec{r}\ \nabla\cdot\vec{B}_0+$$

$$\left(\vec{r}\cdot\nabla\right)\vec{B}_0-\left(\vec{B}_0\cdot\nabla\right)\vec{r}\Big]=\frac{1}{2}\Big[3\vec{B}_0-\vec{B}_0\Big]=\vec{B}_0\ ,$$

unde s-a avut în vedere faptul că $\nabla\cdot\vec{r}\equiv div\,\vec{r}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_i}{\partial x_i}=3$, $\nabla\cdot\vec{B}_0\equiv div\,\vec{B}_0=0$ (teorema Gauss – scrisă sub forma locală – pentru câmpul magnetostatic), $\left(\vec{r}\cdot\nabla\right)\vec{B}_0=\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(B_{0j}\vec{u}_j\right)=\vec{u}_j\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)B_{0j}=\vec{u}_j x_i\frac{\partial B_{0j}}{\partial x_i}=0$ [deoarece $B_{0j}=const.$, $\left(\forall\, j=\overline{1,3}\right)$ şi, în plus, într-un reper cartezian $\vec{u}_j=const.$,

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\left(\forall j=\overline{1,3}\right)]$ şi, în fine, $\left(\vec{B}_0\cdot\nabla\right)\vec{r}=\left(B_{0i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\left(x_j\vec{u}_j\right)=B_{0i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(x_j\vec{u}_j\right)=\vec{u}_jB_{0i}\times$

$\frac{\partial x_j}{\partial x_i}=\vec{u}_jB_{0i}\delta_{ij}=\vec{u}_iB_{0i}=\vec{B}_0$.

Problema nr. 11

Să se găsească expresia potenţialului scalar magnetostatic pentru câmpul creat de un curent rectiliniu infinit, de intensitate I.

Rezolvare

Deoarece

$$\nabla\times\vec{H}=\nabla\times\left(grad\,V_m\right)=0 \tag{11.1}$$

peste tot în jurul curentului, rezultă că se poate introduce un potenţial scalar, V_m, astfel încât să avem

$$\vec{H}=-\nabla V_m. \tag{11.2}$$

În acest caz, liniile de forţă ale câmpului magnetic sunt cercuri situate în plane ortogonale la fir, cu centrele pe fir, iar câmpul este constant în mărime de-a lungul unei linii de forţă (vezi figura 11). Aplicând legea lui Ampère $\left(\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=I_{\text{int}}\right.$, unde I_{int} este intensitatea curentului care trece prin interiorul conturului de integrare), se obţine

$$H_r=H_z=0, \tag{11.3}$$

$$H_\varphi=\frac{I}{2\pi r}, \tag{11.4}$$

unde r, φ şi z sunt coordonatele cilindrice, cu axa Oz dirijată de-a lungul curentului. Pe de altă parte, din relaţia (11.2) scrisă în coordonate cilindrice, rezultă

$$H_r=-\frac{\partial V_m}{\partial r}, \tag{11.5}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$H_\varphi = -\frac{1}{r}\frac{\partial V_m}{\partial \varphi} \tag{11.6}$$

și

$$H_z = -\frac{\partial V_m}{\partial z}. \tag{11.7}$$

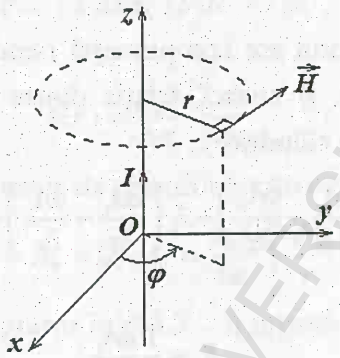


Fig. 11

Din relațiile (11.4) și (11.6), rezultă expresia potențialului magnetostatic, V_m

$$V_m = -\frac{I}{2\pi}\varphi. \tag{11.8}$$

Pentru univocitate putem considera $0 \le \varphi \le 2\pi$. Suprafețele echipotențiale sunt, așadar, plane meridiane.

Problema nr. 12

Să se găsească expresia potențialului vector pentru un câmp magnetic creat de un curent rectiliniu infinit, de intensitate I.

Rezolvare

Simetria problemei impune considerarea coordonatelor cilindrice r, φ și z. Fără a restrânge generalitatea problemei, vom considera axa

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Oz dirijată de-a lungul curentului, caz în care vectorul $\vec{B}$ al inducției magnetice are componentele

$$B_r = B_z = 0 \tag{12.1}$$

și respectiv

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{12.2}$$

Deoarece curentul are componentă nenulă numai pe axa Oz, urmează că $A_r = A_\varphi = 0$, și atunci, relația dintre vectorii $\vec{B}$ și $\vec{A}$ (scrisă, evident, în coordonate cilindrice)

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \vec{e}_r \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \vec{e}_z \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right],$$

conduce la

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}, \tag{12.3}$$

$$B_\varphi = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \tag{12.4}$$

și

$$B_z = 0. \tag{12.5}$$

Din relațiile (12.2) și (12.4) rezultă atunci că

$$A_z = -(\mu_0 I / 2\pi) \ln r, \tag{12.6}$$

care este singura componentă nenulă a potențialului vector, în acest caz.

Problema nr. 13

Să se calculeze inducția $\vec{B}$ a câmpului magnetic creat în vid de un curent rectiliniu staționar, de intensitate I și lungime $2L$.

Rezolvare

Alegând un sistem de coordonate ortogonale cu axa Oz orientată în lungul firului și originea coordonatelor în centrul acestuia (vezi figura 13),

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

vom apela la relația ce exprimă potențialul vector al unei distribuții continue de curenți staționari, în punctul definit de vectorul de poziție $\vec{r}$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')\, d\tau'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \tag{13.1}$$

Dar

$$\vec{j}\, d\tau = \vec{j}\, S\, dl = j S\, d\vec{l} = I\, d\vec{l},$$

şi atunci

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{d\vec{l}}{r}. \tag{13.2}$$

Proiectând (13.2) pe axele de coordonate, avem

$$A_x = A_y = 0;\ A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L}^{+L} \frac{d\xi}{r}. \tag{13.3}$$

Pentru a efectua integrarea în (13.3 - 3) introducem noua variabilă u prin substituția $z - \xi = u$.

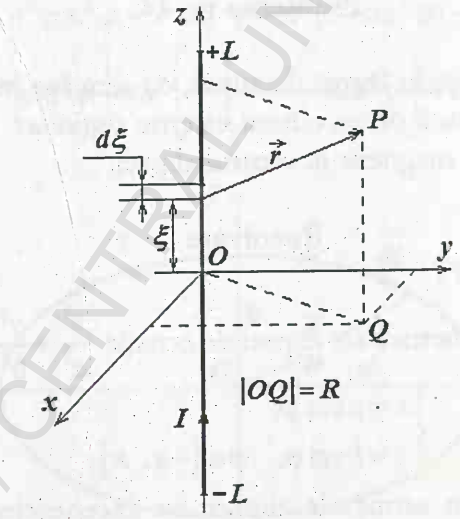


Fig. 13

Cum $r = \sqrt{R^2 + u^2}$ şi $d\xi = -du$, mai avem

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{z-L}^{z+L}\frac{du}{\sqrt{R^2+u^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\operatorname{argsinh}\frac{z+L}{R} - \operatorname{argsinh}\frac{z-L}{R}\right). \quad (13.4)$$

Cum problema prezintă simetrie cilindrică, vom utiliza (13.4) în deducerea câmpului $\vec{B}$. Avem

$$B_r = B_z = 0;\ B_2 = B_\theta = \frac{1}{h_z h_r}\left[\frac{\partial}{\partial z}(A_r) - \frac{\partial}{\partial R}(A_z)\right] = -\frac{\partial A_z}{\partial R}.$$

Utilizând (13.4) şi efectuând derivarea, obţinem în final

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\frac{z+L}{\sqrt{R^2+(z+L)^2}} - \frac{z-L}{\sqrt{R^2+(z-L)^2}}\right]. \quad (13.5)$$

Se observă că, pentru $L \to \infty, (z \neq 0)$ regăsim cunoscuta relaţie

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (13.6)$$

Problema nr. 14

O sârmă subţire în formă de elipsă, cu semiaxa mare a şi excentricitatea e, este străbătută de un curent electric staţionar I. Să se calculeze intensitatea câmpului magnetic în centrul elipsei.

Rezolvare

Ecuaţiile parametrice ale elipsei de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ sunt

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi, \quad \varphi \in [-\pi,\ \pi], \end{cases} \quad (14.1)$$

unde a şi $b<a$ sunt semiaxele elipsei, iar excentricitatea este dată de relaţia $e=\sqrt{1-b^2/a^2}$.

Intensitatea câmpului magnetic $\vec{H}$ în centrul elipsei este

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\oint_{(elipsa)}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}, \quad (14.2)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $d\vec{l}$ este elementul de arc al elipsei, $d\vec{l} = (dx, dy, 0)$, iar $\vec{r}$ este vectorul de poziție al centrului elipsei față de originea vectorului $d\vec{l}$, $\vec{r} = (-x, -y, 0)$ [vezi figura 14]. Atunci, pentru produsul vectorial $d\vec{l} \times \vec{r}$ se obține

$$d\vec{l} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & 0 \\ -x & -y & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\,(-y\,dx + x\,dy), \tag{14.3}$$

ceea ce arată că singura componentă nenulă a câmpului magnetic în centrul elipsei este cea normală la suprafața elipsei (fiind orientată după direcția axei Oz)

$$H_z = \vec{H} \cdot \hat{k} = \frac{I}{4\pi} \oint\limits_{(elipsa)} \frac{(d\vec{l} \times \vec{r}) \cdot \hat{k}}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \oint\limits_{(elipsa)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{r^3}. \tag{14.4}$$

Conform parametrizării (14.1) putem scrie

$$r^2 = x^2 + y^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi = a^2(1 - \sin^2\varphi) + b^2 \sin^2\varphi = a^2 \times$$

$$\left[1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)\sin^2\varphi\right] = a^2\left[1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2\varphi\right] = a^2\left(1 - e^2\sin^2\varphi\right), \tag{14.5}$$

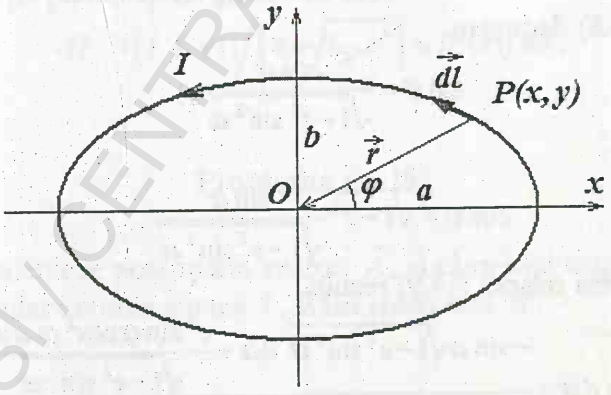


Fig. 14

deci

$$r = a\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}\,. \tag{14.6}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Apoi, din relaţiile (14.1), prin diferenţiere, rezultă

$$\begin{cases} dx = -a\sin\varphi\, d\varphi, \\ dy = b\cos\varphi\, d\varphi, \end{cases}$$

şi atunci

$$H_z = \frac{I}{4\pi}\oint\limits_{(elipsa)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{r^3} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\left[(-b\sin\varphi)(-a\sin\varphi) + a\cos\varphi\, b\cos\varphi\right]d\varphi}{a^3\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}} \times$$

$$\frac{I}{4\pi} = \frac{bI}{4\pi a^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}} = \frac{I\sqrt{1-e^2}}{4\pi a}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} =$$

$$\frac{I\sqrt{1-e^2}}{2\pi a}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} = \frac{I\sqrt{1-e^2}}{\pi a}\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}, \tag{14.7}$$

unde, pentru a scrie penultima egalitate, am ţinut cont că integrandul este o funcţie pară şi intervalul de integrare este simetric faţă de origine, iar în ultima egalitate am făcut apel la periodicitatea funcţiei $\sin^2\varphi$. Pentru a rezolva integrala (14.7) vom utiliza schimbarea de variabilă

$$1-e^2\sin^2\varphi = \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\alpha}. \tag{14.8}$$

Din relaţia (14.8) deducem

$$\sin\varphi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}, \tag{14.9}$$

şi

$$\cos\varphi = \sqrt{1-e^2}\,\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}. \tag{14.10}$$

Prin diferenţierea relaţiei (14.9) rezultă

$$\cos\varphi\, d\varphi = \frac{-\sin\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\, d\alpha + \dfrac{e^2\sin\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}}{1-e^2\sin^2\alpha} =$$

$$\frac{-\sin\alpha\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\sin^2\alpha\right)^{3/2}}d\alpha,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde, utilizând şi (14.10),

$$d\varphi = \frac{-\sin\alpha\left(1-e^2\right)}{\cos\varphi\left(1-e^2\sin^2\alpha\right)^{3/2}}d\alpha = \frac{-\sin\alpha\left(1-e^2\right)\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-e^2}\,\sin\alpha\left(1-e^2\sin^2\alpha\right)^{3/2}}d\alpha = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\alpha}d\alpha. \tag{14.11}$$

Cu (14.8) şi (14.11) în (14.7), avem

$$H_z = \frac{I\sqrt{1-e^2}}{\pi a}\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} = -\frac{I\sqrt{1-e^2}}{\pi a}\times$$

$$\int_{\pi/2}^{0}\frac{\left(1-e^2\sin^2\alpha\right)^{3/2}\sqrt{1-e^2}\;d\alpha}{\left(1-e^2\right)^{3/2}\left(1-e^2\sin^2\alpha\right)} = \frac{I}{\pi a\sqrt{1-e^2}}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\;d\alpha = \frac{I\,E(e)}{\pi a\sqrt{1-e^2}},$$

unde $E(e)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\;d\alpha$ este integrala eliptică completă de speţa a doua, scrisă sub forma trigonometrică a lui Legendre.

În concluzie, intensitatea câmpului magnetic în centrul unei spire de formă eliptică, având semiaxa mare a şi excentricitatea e este orientat perpendicular pe planul spirei şi are valoarea

$$H_z = \left(I\,E(e)\right)\Big/\left(\pi a\sqrt{1-e^2}\right) = IE(e)/\pi b\,. \tag{14.12}$$

Problema nr. 15

Să se calculeze potenţialul vector, $\vec{A}$, al câmpului magnetic creat de un curent circular cu intensitatea I. Raza spirei este R.

Rezolvare

Considerăm un sistem de coordonate cu originea în centrul spirei şi axa Oz dirijată perpendicular pe planul acesteia (vezi figura 15.1).

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece problema are simetrie cilindrică, vom lucra în coordonate cilindrice. Fie $P(\rho,\varphi,z)$ punctul de observație și P' proiecția sa în planul spirei. Considerăm un punct curent, Q, pe spiră și $Id\vec{l}$ un element infinitezimal de curent cu originea în Q. Triunghiul $\Delta PP'Q$ este dreptunghic, cu unghiul drept în P'. Triedrul local în punctul de observație, format de vectorii unitari $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ și $\vec{e}_z$ este orientat ca în figură.

Potențialul vector este dat de relația

$$\vec{A}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{spira}\frac{d\vec{l}}{r}, \tag{15.1}$$

unde r este distanța dintre punctele P și Q. Din figura 3.1. rezultă că

$$r^2=r'^2+z^2=R^2+\rho^2-2\rho R\cos\alpha+z^2. \tag{15.2}$$

Componentele vectorului $\vec{A}$ pe axele triedrului local se obțin înmulțind scalar expresia (15.1) cu vectorii unitate pe direcțiile respective. Deoarece $d\vec{l}\perp\vec{e}_z$, rezultă că

$$A_z=\vec{A}\cdot\vec{e}_z=0. \tag{15.3}$$

Apoi, după cum se poate observa din figura 15.2.,

$$d\vec{l}\cdot\vec{e}_\rho=dl\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=dl\sin\alpha, \tag{15.4}$$

ceea ce conduce la

$$A_\rho=\vec{A}\cdot\vec{e}_\rho=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{spira}\frac{d\vec{l}\cdot\vec{e}_\rho}{r}. \tag{15.5}$$

Întrucât $dl=R\,d\alpha$, rezultă că

$$A_\rho=\frac{\mu_0 I R}{4\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{r}=0, \tag{15.6}$$

deoarece integrandul este funcție impară de α, iar intervalul de integrare este simetric față de origine.

În fine, având în vedere că $d\vec{l}\cdot\vec{e}_\varphi=dl\cos\alpha=R\cos\alpha\,d\alpha$, componenta azimutală a potențialului vector va fi

$$A_\varphi=\vec{A}\cdot\vec{e}_\varphi=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{spira}\frac{d\vec{l}\cdot\vec{e}_\varphi}{r}=\frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\alpha d\alpha}{r}=\frac{\mu_0 IR}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\cos\alpha d\alpha}{r}, \tag{15.7}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

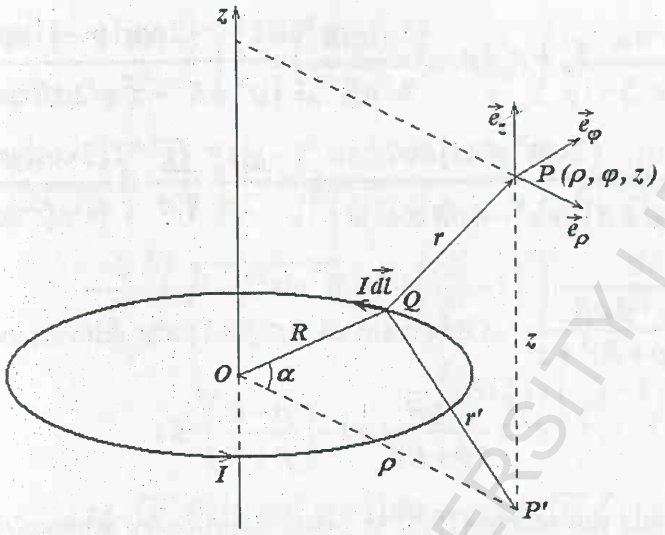


Fig. 15.1

unde am avut în vedere faptul că integrandul este o funcție pară de α, iar intervalul de integrare este, de asemenea, simetric față de origine.

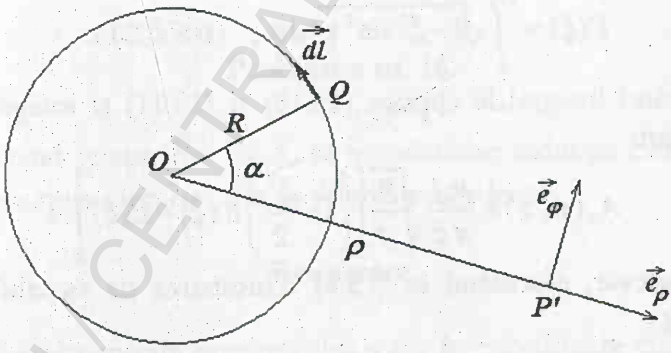


Fig. 15.2

Schimbarea de variabilă $\alpha = 2\psi$ conduce la următoarea expresie pentru A_φ:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$A_\varphi = A_\varphi(\rho, z) = \frac{\mu_0 IR}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\cos^2\psi - 1\right)d\psi}{\left(\rho^2 + R^2 + z^2 - 2\rho R\cos 2\psi\right)^{1/2}} =$$

$$\frac{\mu_0 IR}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\cos^2\psi - 1\right)d\psi}{\left[\left(\rho + R\right)^2 + z^2 - 4\rho R\cos^2\psi\right]^{1/2}} = \frac{\mu_0 I\xi}{2\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\cos^2\psi - 1\right)d\psi}{\left(1 - \xi^2\cos^2\psi\right)^{1/2}}, \tag{15.8}$$

unde $\xi^2 = \dfrac{4\rho R}{(\rho + R)^2 + z^2}$. Observăm că $0 \le \xi \le 1$; într-adevăr, avem

$$\xi^2 \le \frac{4\rho R}{(\rho + R)^2} = 1 - \left(\frac{\rho - R}{\rho + R}\right)^2 \le 1. \tag{15.9}$$

Integrala din relația (15.8) se poate exprima cu ajutorul integralelor eliptice complete de speța întâi și a doua, în forma trigonometrică a lui Legendre

$$K(\xi) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - \xi^2\sin^2\psi}}, \tag{15.10}$$

și respectiv

$$E(\xi) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - \xi^2\sin^2\psi}\, d\psi, \quad (0 \le \xi \le 1). \tag{15.11}$$

Utilizând integralele eliptice (15.10) și (15.11) și integrând relația (15.8), obținem

$$A_\varphi(\rho, z) = \frac{\mu_0 I}{\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left[\left(1 - \frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi) - E(\xi)\right]. \tag{15.12}$$

Într-adevăr, efectuând în (15.8) schimbarea de variabilă $\cos\psi = \sin\theta$, rezultă

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\cos^2\psi - 1\right)d\psi}{\left(1 - \xi^2\cos^2\psi\right)^{1/2}} = \int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\sin^2\theta - 1\right)d\theta}{\sqrt{1 - \xi^2\sin^2\theta}},$$

și atunci

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\cos^2\psi-1\right)d\psi}{\left(1-\xi^2\cos^2\psi\right)^{1/2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\theta}}=-\frac{2}{\xi^2}\int_0^{\pi/2}\frac{-\xi^2\sin^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\theta}}-$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\theta}}=-\frac{2}{\xi^2}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(1-\xi^2\sin^2\theta-1\right)d\theta}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\theta}}-\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\theta}}=$$

$$-\frac{2}{\xi^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\xi^2\sin^2\theta}\,d\theta+\left(\frac{2}{\xi^2}-1\right)\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\theta}}=$$

$$-\frac{2}{\xi^2}E(\xi)+\left(\frac{2}{\xi^2}-1\right)K(\xi)\,,$$

deci

$$A_\varphi(\rho,z)=\frac{\mu_0 I\xi}{2\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(2\cos^2\psi-1\right)d\psi}{\left(1-\xi^2\cos^2\psi\right)^{1/2}}=\frac{\mu_0 I\xi}{2\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left[-\frac{2}{\xi^2}E(\xi)+\right.$$

$$\left.\left(\frac{2}{\xi^2}-1\right)K(\xi)\right]=\frac{\mu_0 I}{\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi)-E(\xi)\right].$$

(q.e.d.)

Problema nr. 16

Utilizând relația $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$, să se calculeze inducția câmpului magnetic creat de spira circulară din problema precedentă.

Rezolvare

Utilizând expresia operatorului rotor în coordonate cilindrice [vezi relația (D.34)], avem

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\vec{e}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)+\vec{e}_z\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\varphi\right)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right].$$

(16.1)

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Deoarece $A_\rho = A_z = 0$, rezultă

$$B_\rho = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \tag{16.2}$$

$$B_\varphi = 0 \tag{16.3}$$

şi

$$B_z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\varphi\right), \tag{16.4}$$

unde, aşa cum s-a demonstrat în problema precedentă,

$$A_\varphi(\rho, z) = \frac{\mu_0 I}{\pi \xi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi) - E(\xi)\right], \tag{16.5}$$

cu

$$\xi^2 = \frac{4\rho R}{(\rho+R)^2 + z^2}. \tag{16.6}$$

Deoarece A_φ depinde de variabila z în mod implicit, prin intermediul lui ξ, relaţia (16.2) se rescrie astfel

$$B_\rho = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}, \tag{16.7}$$

unde derivata $\frac{\partial \xi}{\partial z}$ se poate calcula imediat cu ajutorul lui (16.6)

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{2z\sqrt{\rho R}}{((\rho+R)^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{z\xi^3}{4\rho R}. \tag{16.8}$$

În plus

$$\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = \sqrt{\frac{R}{\rho}}\frac{R^2+z^2-\rho^2}{\left[(\rho+R)^2+z^2\right]^{3/2}} = \frac{\xi}{2\rho} - \frac{(\rho+R)\xi^3}{4R\rho}. \tag{16.9}$$

Cu aceasta au rămas de calculat doar derivatele $\frac{\partial E(\xi)}{\partial \xi} = \frac{dE(\xi)}{d\xi}$ şi $\frac{\partial K(\xi)}{\partial \xi} = \frac{dK(\xi)}{d\xi}$, unde $E(\xi)$ şi $K(\xi)$ sunt date de relaţiile

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$E(\xi)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\xi^2\sin^2\psi}\,d\psi$$

şi

$$K(\xi)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\psi}},\quad (0\le\xi\le 1).$$

Utilizând formula de derivare a unei integrale ce depinde de un parametru

$$\frac{dF(y)}{dy}=\int_{a(y)}^{b(y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx+b'(y)f\big(b(y),y\big)-a'(y)f\big(a(y),y\big),\quad (16.10)$$

unde $F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)}f(x,y)dx$, iar $f(x,y)$ este o funcţie având derivate parţiale continue în raport cu y, avem

$$\frac{dK(\xi)}{d\xi}=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\psi}}\right)d\psi=\int_0^{\pi/2}\frac{\xi\sin^2\psi}{\left(1-\xi^2\sin^2\psi\right)^{3/2}}d\psi=$$

$$\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{\xi}\right)\frac{-\xi^2\sin^2\psi}{\left(1-\xi^2\sin^2\psi\right)\sqrt{1-\xi^2\sin^2\psi}}d\psi=$$

$$\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{1}{\xi}\right)\left[\frac{1-\xi^2\sin^2\psi}{\left(1-\xi^2\sin^2\psi\right)\sqrt{1-\xi^2\sin^2\psi}}-\frac{1}{\left(1-\xi^2\sin^2\psi\right)^{3/2}}\right]d\psi=$$

$$-\frac{1}{\xi}K(\xi)+\frac{1}{\xi}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\left(1-\xi^2\sin^2\psi\right)^{3/2}},\quad (16.11)$$

şi respectiv

$$\frac{dE(\xi)}{d\xi}=\int_0^{\pi/2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{1-\xi^2\sin^2\psi}\right)d\psi=\int_0^{\pi/2}\frac{-\xi\sin^2\psi}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\psi}}d\psi=$$

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\xi}\left(\sqrt{1-\xi^2\sin^2\psi}-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\psi}}\right)d\psi=\frac{1}{\xi}\big[E(\xi)-K(\xi)\big].\quad (16.12)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru a exprima ultima integrală din relația (16.11) în funcție de integralele eliptice $K(\xi)$ și $E(\xi)$ vom utiliza schimbarea de variabilă

$$1-\xi^2\sin^2\psi=\frac{1-\xi^2}{1-\xi^2\sin^2\theta}. \tag{16.13}$$

Din relația (16.13) rezultă

$$\sin^2\psi=\frac{1}{\xi^2}\left(1-\frac{1-\xi^2}{1-\xi^2\sin^2\theta}\right)=\frac{\cos^2\theta}{1-\xi^2\sin^2\theta},$$

adică

$$\sin\psi=\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\theta}}. \tag{16.14}$$

În plus

$$\cos\psi=\frac{\sqrt{1-\xi^2}\sin\theta}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\theta}}. \tag{16.15}$$

Din (16.14) avem apoi

$$\cos\psi d\psi=\frac{-\sin\theta\left(1-\xi^2\sin^2\theta\right)+\xi^2\cos^2\theta\sin\theta}{\left(1-\xi^2\sin^2\theta\right)\sqrt{1-\xi^2\sin^2\theta}}d\theta=-\frac{\left(1-\xi^2\right)\sin\theta}{\left(1-\xi^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}d\theta,$$

sau, cu ajutorul relației (16.15),

$$\frac{\sqrt{1-\xi^2}\sin\theta}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\theta}}d\psi=-\frac{\left(1-\xi^2\right)\sin\theta}{\left(1-\xi^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}d\theta,$$

de unde

$$d\psi=-\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{1-\xi^2\sin^2\theta}d\theta. \tag{16.16}$$

Atunci, ultima integrală din relația (16.11) devine

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\left(1-\xi^2\sin^2\psi\right)^{3/2}}=-\int_{\pi/2}^{0}\left(\frac{1-\xi^2\sin^2\theta}{1-\xi^2}\right)^{3/2}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{1-\xi^2\sin^2\theta}d\theta=$$

$$\frac{1}{1-\xi^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\xi^2\sin^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{1-\xi^2}E(\xi).$$

Rezultă așadar

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{dK(\xi)}{d\xi}=\frac{1}{\xi}\left(\frac{E(\xi)}{1-\xi^2}-K(\xi)\right). \tag{16.17}$$

Cu aceste rezultate în (16.7), pentru componenta radială a inducției câmpului magnetic avem

$$B_\rho=-\frac{\partial A_\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{\mu_0 I}{\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi)-E(\xi)\right]\right\}\frac{\partial\xi}{\partial z}=$$

$$-\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{\mu_0 I}{\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi)-E(\xi)\right]\right\}\left(-\frac{z\xi^3}{4\rho R}\right)=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\frac{z\xi^3}{\rho R}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{1}{\xi}\times\right.$$

$$\left.\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi)-E(\xi)\right]\right\}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\frac{z\xi^3}{\rho R}\frac{d}{d\xi}\left[\left(\frac{1}{\xi}-\frac{\xi}{2}\right)K(\xi)-\frac{1}{\xi}E(\xi)\right]=$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\frac{z\xi^3}{\rho R}\left[\left(-\frac{1}{\xi^2}-\frac{1}{2}\right)K(\xi)+\left(\frac{1}{\xi}-\frac{\xi}{2}\right)\frac{dK(\xi)}{d\xi}+\frac{1}{\xi^2}E(\xi)-\frac{1}{\xi}\frac{dE(\xi)}{d\xi}\right]=$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\frac{z\xi^3}{\rho R}\left[\left(-\frac{1}{\xi^2}-\frac{1}{2}\right)K(\xi)+\frac{1}{\xi}\left(\frac{1}{\xi}-\frac{\xi}{2}\right)\left(\frac{E(\xi)}{1-\xi^2}-K(\xi)\right)+\frac{1}{\xi^2}E(\xi)-\right.$$

$$\left.\frac{1}{\xi^2}\left(E(\xi)-K(\xi)\right)\right]=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\frac{z\xi^3}{\rho R}\left[-\frac{1}{\xi^2}K(\xi)+E(\xi)\frac{1}{1-\xi^2}\left(\frac{1}{\xi^2}-\frac{1}{2}\right)\right]=$$

$$\frac{\mu_0 I}{4\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\frac{z\xi}{\rho R}\left(-K(\xi)+\frac{1}{2}E(\xi)\frac{2-\xi^2}{1-\xi^2}\right),$$

sau, dacă ținem seama de relația (16.6),

$$B_\rho=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{z}{\rho\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}}\left(-K(\xi)+\frac{\rho^2+R^2+z^2}{(\rho-R)^2+z^2}E(\xi)\right).$$

În fine, utilizând relațiile (16.5), (16.6), (16.9), (16.12) și (16.17), pentru componenta axială a inducției câmpului magnetic, dată de relația (16.4), avem

$$B_z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right)=\frac{1}{\rho}A_\varphi+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\mu_0 I}{\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi)-E(\xi)\right]+$$

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{\mu_0 I}{\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi)-E(\xi)\right]\right\}=\frac{\mu_0 I}{\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho^3}}\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi)-E(\xi)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho^3}}\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi)-E(\xi)\right]+\frac{\mu_0 I}{\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\frac{\partial\xi}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi)-\right.\right.$$

$$\left.\left.E(\xi)\right]\frac{1}{\xi}\right\}=\frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho^3}}\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi)-E(\xi)\right]+\frac{\mu_0 I}{\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left[\frac{\xi}{2\rho}-\frac{(\rho+R)}{4R\rho}\times\right.$$

$$\left.\xi^3\right]\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(\frac{1}{\xi}-\frac{\xi}{2}\right)K(\xi)-\frac{1}{\xi}E(\xi)\right]=\frac{\mu_0 I}{2\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho^3}}\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi)-E(\xi)\right]+\frac{\mu_0 I}{\pi}\times$$

$$\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left[\frac{\xi}{2\rho}-\frac{(\rho+R)\xi^3}{4R\rho}\right]\left[\left(\frac{1}{\xi}-\frac{\xi}{2}\right)\frac{\partial K(\xi)}{\partial\xi}-\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{2}\right)K(\xi)-\frac{1}{\xi}\frac{\partial E(\xi)}{\partial\xi}+E(\xi)\times\right.$$

$$\left.\frac{1}{\xi^2}\right]=\frac{\mu_0 I}{2\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho^3}}\left[\left(1-\frac{\xi^2}{2}\right)K(\xi)-E(\xi)\right]+\frac{\mu_0 I}{2\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho^3}}\left[\xi^2-\frac{(\rho+R)\xi^4}{2R}\right]\times$$

$$\left[\left(\frac{1}{\xi^2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{E(\xi)}{1-\xi^2}-K(\xi)\right)-\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{2}\right)K(\xi)-\frac{1}{\xi^2}(E(\xi)-K(\xi))+\frac{1}{\xi^2}E(\xi)\right]=$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi\xi}\sqrt{\frac{R}{\rho^3}}\left[\frac{\rho\xi^2}{2R}K(\xi)-\frac{2\rho\xi^2-(\rho+R)\xi^4}{4R\left(1-\xi^2\right)}E(\xi)\right],$$

sau, dacă ținem seama de relația (16.6),

$$B_z=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}}\left(F(\xi)-\frac{\rho^2-R^2+z^2}{(\rho-R)^2+z^2}E(\xi)\right).$$

Problema nr. 17

Să se determine liniile de câmp pentru câmpul magnetic creat de o spiră circulară de rază R, străbătută de un curent electric staționar de intansitate I.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

Întrucât în coordonate cilindrice elementul de linie $d\vec{l}$ are componentele: $d\rho$, $\rho d\varphi$ şi dz, ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de forţă se scriu astfel

$$\frac{d\rho}{B_\rho}=\frac{\rho\, d\varphi}{B_\varphi}=\frac{dz}{B_z}. \tag{17.1}$$

În problema precedentă am obţinut componentele câmpului magnetic generat de un curent circular de rază R, anume

$$B_\rho=-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z},\ B_\varphi=0,\ B_z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right), \tag{17.2}$$

unde A_φ este dat de relaţia (16.5). Din (17.2) şi (17.1) rezultă

$$\frac{d\rho}{-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}}=\frac{\rho\, d\varphi}{0}=\frac{dz}{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right)}. \tag{17.3}$$

O integrală primă se observă imediat:

$$\varphi=const.\equiv C_1, \tag{17.4}$$

ceea ce arată că liniile de forţă sunt curbe plane, conţinute în planele meridiane. A doua integrală primă se obţine din ecuaţiile rămase

$$\frac{d\rho}{-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}}=\frac{dz}{\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right)},$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\varphi\right)d\rho+\frac{\partial\left(\rho A_\varphi\right)}{\partial z}dz=0. \tag{17.5}$$

Deoarece $A_\varphi=A_\varphi(\rho,z)$, din relaţia (17.5) rezultă că $d\left(\rho A_\varphi\right)=0$, adică

$$\rho A_\varphi=const.\equiv C_2. \tag{17.6}$$

Curbele exprimate de această ecuaţie sunt nişte ovale, care înconjoară spira străbătută de curent şi sunt simetrice faţă de planul spirei. Liniile de forţă sunt complet determinate de relaţiile (17.4) şi (17.6).

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 18

Să se arate că la mare distanță de centrul unei spire circulare, străbătută de un curent electric staționar de intensitate I, potențialul vector, $\vec{A}$, se poate scrie sub forma $\vec{A}_\varphi \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}_0}{r_0^3}$, unde $\vec{r}_0$ este raza vectoare (față de centrul spirei) a punctului de observație, iar $\vec{m}$ este momentul magnetic al spirei.

Rezolvare

Fie $\vec{r}_0$ raza vectoare a punctului de observație față de centrul spirei, și θ – unghiul format de $\vec{r}_0$ cu axa Oz (vezi figura 18). Din figură se observă cu ușurință că

$$\begin{cases} \rho = r_0 \sin\theta, \\ z = r_0 \cos\theta, \\ r_0^2 = \rho^2 + z^2, \end{cases} \tag{18.1}$$

și atunci, întrucât trunghiul PQP' este dreptunghic, cu unghiul drept în P', putem scrie

$$r^2 = z^2 + \left|P'Q\right|^2 = r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \sin\theta\cos\alpha. \tag{18.2}$$

După cum rezultă din problema 15 [relația (15.7)], singura componentă diferită de zero a potențialului vector este componenta azimutală, A_φ:

$$A_\varphi = \vec{A}\cdot\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_{spira}\frac{d\vec{l}\cdot\vec{e}_\varphi}{r} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\alpha d\alpha}{r} = \frac{\mu_0 IR}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\alpha d\alpha}{r},$$

care, ținând cont de relația (18.2), devine

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I R}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos\alpha d\alpha}{r} = \frac{\mu_0 I R}{2\pi r_0}\int_0^{\pi}\frac{\cos\alpha d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{2R}{r_0}\sin\theta\cos\alpha + \frac{R^2}{r_0^2}}}. \tag{18.3}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

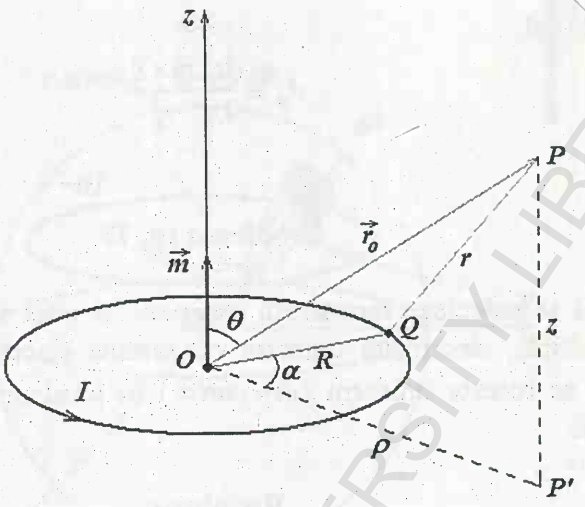


Fig. 18

La distanțe mari față de spiră, adică pentru r_0 foarte mare $\left(\frac{R}{r_0} \ll 1\right)$, putem utiliza aproximația

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2R}{r_0}\sin\theta\cos\alpha+\frac{R^2}{r_0^2}}} \cong \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2R}{r_0}\sin\theta\cos\alpha}} \cong 1+\frac{R}{r_0}\sin\theta\cos\alpha,$$

care, înlocuită în (18.3) conduce la

$$A_\varphi \cong \frac{\mu_0 I R}{2\pi r_0}\int_0^\pi\left(1+\frac{R}{r_0}\sin\theta\cos\alpha\right)\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 I R^2 \sin\theta}{2\pi r_0^2}\times \tag{18.4}$$

$$\int_0^\pi \cos^2\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0 I R^2}{4 r_0^2}\sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r_0^2},$$

unde $m = I S = I\pi R^2$ este momentul magnetic al spirei, orientat după normala la suprafața spirei, adică după axa Oz. Deoarece unghiul dintre vectorii $\vec{r}_0$ și $\vec{m}$ este θ, putem scrie

$$\left|\vec{A}_\varphi\right| \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left|\vec{m}\times\vec{r}_0\right|}{r_0^3},$$

BCU ASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau, vectorial,

$$\vec{A}_\varphi \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}_0}{r_0^3}. \tag{18.5}$$

Problema nr. 19

Să se calculeze momentul magnetic al unei sfere pline, omogene (nemagnetică), electrizată uniform cu sarcina electrică Q. Sfera, având raza R, se roteşte uniform ($\omega = const.$) în jurul unei axe ce trece prin centrul ei.

Rezolvare

Prin rotaţia în jurul axei Oz, cantitatea „elementară" de sarcină electrică $dQ = \rho\, dV = \rho\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ generează un curent electric staţionar de intensitate $dI = \frac{dQ}{T} = \frac{dQ\,\omega}{2\pi}$, echivalent cu o spiră „elementară" de rază $R_{se} = r\sin\theta$ (vezi figura 19, în care, elementul de volum dV corespunzător sarcinii „elementare" dQ a fost reprezentat exagerat de mare în raport cu grosimea spirei „elementare" din motive de claritate a desenului), al cărei moment magnetic „elementar" este

$$dm_z = S_z\, dI = \pi R_{se}^2 dI = \pi r^2 \sin^2\theta\, dI = \pi r^2 \sin^2\theta \frac{dQ}{T} = \frac{1}{2}\omega\rho\, r^4 \sin^3\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi. \tag{19.1}$$

De aici, prin integrare, se obţine

$$m_z = \frac{\rho\omega}{2}\int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\rho\omega}{2}\frac{R^5}{5}\left(\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta\right)2\pi = \frac{\pi R^5 \rho\omega}{5}\int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta\,. \tag{19.2}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

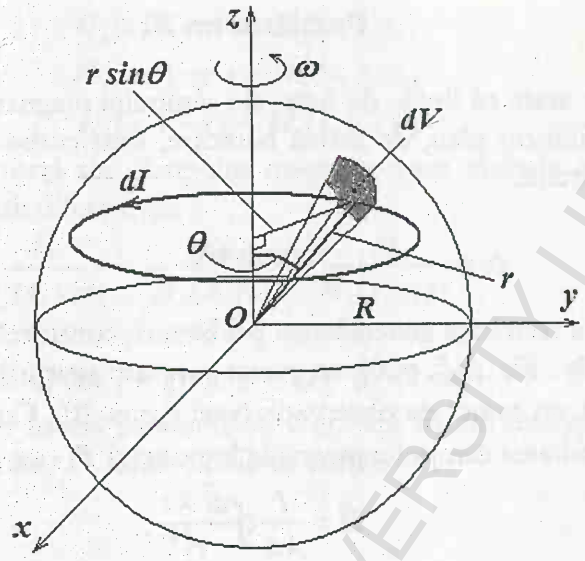


Fig. 19

Deoarece

$$\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}\sin^2\theta\sin\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,d(-\cos\theta)=-\left(\sin^2\theta\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}+$$

$$2\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta=2\int_0^{\pi}\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta=-2\int_0^{\pi}\cos^2\theta\,d(\cos\theta)=$$

$$\left(-\frac{2}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{3},\tag{19.3}$$

urmează că momentul magnetic al unei sfere (de rază R) pline, omogene (nemagnetică), electrizată uniform cu sarcina electrică Q şi care se roteşte în jurul unui diametru cu viteza unghiulară constantă ω este

$$m_z=\frac{1}{5}\frac{4\pi R^3}{3}\rho\omega R^2=\frac{1}{5}Q\omega R^2.\tag{19.4}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 20

Să se arate că liniile de forţă ale câmpului magnetic creat în vid de un curent filiform plan, de formă oarecare, sunt curbe simetrice faţă de planul circuitului.

Rezolvare

Fără a restrânge generalitatea problemei, considerăm circuitul situat în planul xOy. Fie $A(\xi, \eta, 0)$ un punct oarecare aparţinând acestui circuit şi $P(x, y, z)$ un punct de observaţie (vezi figura 20). Conform legii Biot-Savart, intensitatea câmpului magnetic în punctul P este

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \tag{20.1}$$

unde $\vec{r}$ este raza vectoare dirijată de la elementul de curent către punctul de observaţie: $\vec{r} = \vec{r}(x-\xi, y-\eta, z)$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$. Delimitând un element infinitezimal de lungime de-a lungul circuitului, $d\vec{l}\,(d\xi, d\eta, 0)$, produsul vectorial din formula (20.1) se scrie astfel

$$d\vec{l} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ d\xi & d\eta & 0 \\ x-\xi & y-\eta & z \end{vmatrix} = \vec{i}\, z d\eta - \vec{j}\, z d\xi + \vec{k}\left[(y-\eta)d\xi - (x-\xi)d\eta\right].$$

Prin înlocuire în (20.1), rezultă următoarele componente pentru $\vec{H}$:

$$H_x(x, y, z) = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{z d\eta}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2)^{3/2}}; \tag{20.2}$$

$$H_y(x, y, z) = -\frac{I}{4\pi} \oint \frac{z d\xi}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2)^{3/2}}; \tag{20.3}$$

$$H_z(x, y, z) = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{(y-\eta)d\xi - (x-\xi)d\eta}{((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{20.4}$$

Să considerăm acum punctul $P'(x, y, -z)$, simetric punctului $P(x, y, z)$ faţă de planul circuitului. Atunci, din relaţiile (20.2), (20.3) şi (20.4) se observă că

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$H_x(x,y,-z) = -H_x(x,y,z); \tag{20.5}$$

$$H_y(x,y,-z) = -H_y(x,y,z); \tag{20.6}$$

$$H_z(x,y,-z) = H_z(x,y,z)\ . \tag{20.7}$$

Liniile de forţă ale câmpului magnetic sunt curbele integrale ale sistemului de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dx}{H_x(x,y,z)} = \frac{dy}{H_y(x,y,z)} = \frac{dz}{H_z(x,y,z)} \equiv dt\,. \tag{20.8}$$

Fie

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t),\ (t_1 < t < t_2)\,, \tag{20.9}$$

o soluţie (dată sub formă parametrică) a acestui sistem (ecuaţiile parametrice ale unei porţiuni, Γ, dintr-o linie de forţă).

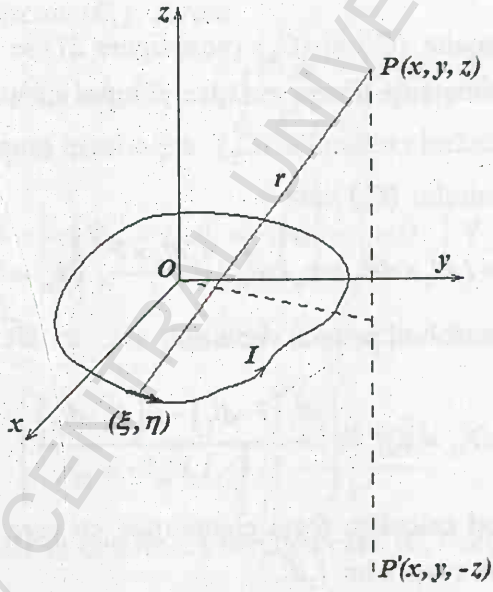


Fig. 20

Ţinând seama de relaţiile de simetrie (20.5), (20.6) şi (20.7), se observă cu uşurinţă că

$$x = f(t) = f(-t),\ y = g(t) = g(-t),\ z = -h(t) = -h(-t),\ (-t_2 < t < -t_1)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sunt curbe bine definite, în conformitate cu soluția (20.9) şi satisfac, de asemenea, sistemul (20.8). Ele reprezintă porțiunea din linia de forță Γ', simetrică cu Γ față de planul circuitului.

Problema nr. 21

Să se arate că forța de interacțiune dintre două circuite electrice străbătute de curenți staționari satisface principiul acțiunii şi reacțiunii, în timp ce forța cu care interacționează două elemente de circuit nu satisface acest principiu.

Rezolvare

Cele două circuite (C_1) şi (C_2) (vezi figura 21) se presupun fixe, iar curenții I_1 şi I_2 constanți. Forța cu care câmpul creat de elementul de curent $I_2\,d\vec{l}_2$, aparținând circuitului (C_2), acționează asupra elementului de curent $I_1\,d\vec{l}_1$ al circuitului (C_1) este

$$d\vec{F}_{12} = I_1 d\vec{l}_1 \times d\vec{B}_2 = k_m I_1 d\vec{l}_1 \times \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{r}}{r^3}; \left(k_m = \frac{\mu_o}{4\pi}\right), \tag{21.1}$$

sau, dacă dezvoltăm dublul produs vectorial,

$$d\vec{F}_{12} = k_m I_1 I_2 \left[\frac{d\vec{l}_2\left(\vec{r}\cdot d\vec{l}_1\right) - \vec{r}\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right)}{r^3}\right]. \tag{21.2}$$

În acelaşi mod calculăm forța elementară cu care elementul de curent $I_1 d\vec{l}_1$ acționează asupra lui $I_2 d\vec{l}_2$:

$$d\vec{F}_{21} = k_m I_1 I_2 \left[\frac{\vec{r}\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right) - d\vec{l}_1\left(\vec{r}\cdot d\vec{l}_2\right)}{r^3}\right]. \tag{21.3}$$

După cum se observă,

$$d\vec{F}_{12} \neq -\,d\vec{F}_{21}\,. \tag{21.4}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

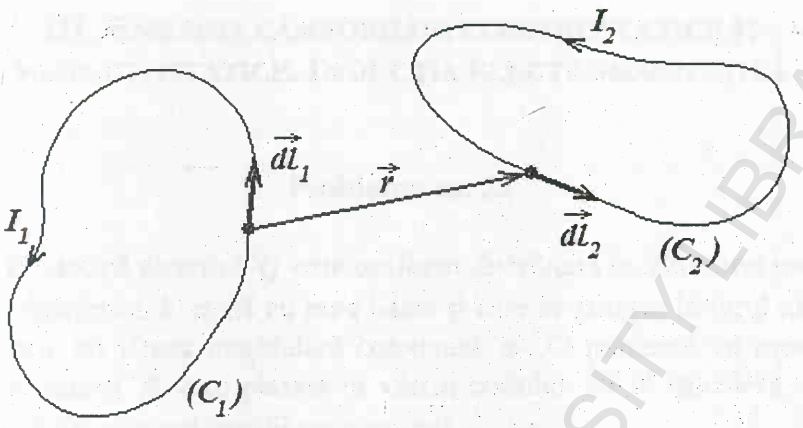


Fig. 21

Să calculăm acum forța cu care elementul de curent $I_2 d\vec{l}_2$ acționează asupra întregului circuit (C_1). Avem

$$d\vec{F}_{12}(C_1) = k_m I_1 I_2 \left[d\vec{l}_2 \oint_{C_1} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{l}_1}{r^3} - \oint_{C_1} \frac{\vec{r}(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{r^3} \right].$$

Dar

$$\oint_{C_1} \frac{\vec{r}\cdot d\vec{l}_1}{r^3} = -\oint_{C_1} \nabla_1\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\vec{l}_1 = -\oint_{C_1} d\left(\frac{1}{r}\right) = 0\,;\ \left(\nabla_1 = \frac{\partial}{\partial \vec{l}_1}\right),$$

şi atunci forța totală cu care circuitul (C_2) acționează asupra circuitului (C_1) este

$$\vec{F}_{12} = -k_m I_1 I_2 \oint_{C_2}\oint_{C_1} \frac{\vec{r}\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right)}{r^3}. \qquad (21.5)$$

În mod similar se determină forța cu care (C_1) acționează asupra lui (C_2):

$$\vec{F}_{21} = k_m I_1 I_2 \oint_{C_1}\oint_{C_2} \frac{\vec{r}\left(d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2\right)}{r^3}, \qquad (21.6)$$

de unde, după cum era de aşteptat,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \qquad (21.7)$$

BCUIASI/CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

III. Energia câmpurilor electrostatice şi magnetostatice. Inducţia electromagnetică

Problema nr. 22

O sarcină electrică Q este uniform distribuită în interiorul unui con care are înălţimea h egală cu raza bazei şi care se roteşte în jurul axei sale de simetrie cu viteza unghiulară constantă ω. O particulă cu momentul magnetic intern $\vec{\mu}$ este plasată în vârful conului. Să se calculeze energia magnetică de interacţiune dintre particulă şi con.

Rezolvare

Energia de interacţiune magnetică dintre particulă şi con este – ca expresie – aceeaşi cu cea corespunzătoare unui dipol magnetic $\vec{\mu}$, sau a unui moment magnetic permanent $\vec{\mu}$, aflat într-un câmp magnetic extern

$$W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}, \tag{22.1}$$

unde inducţia câmpului magnetic extern, $\vec{B}$, poate fi şi variabilă în timp.

Acest binecunoscut rezultat pentru energia potenţială a unui dipol de moment magnetic $\vec{\mu}$ arată faptul că dipolul tinde să se orienteze el însuşi paralel cu câmpul, pentru a ajunge într-o poziţie cu energie potenţială minimă.

În realitate, energia W dată de expresia (22.1) *nu* este energia totală a dipolului de moment magnetic $\vec{\mu}$ în câmpul exterior $\vec{B}$, deoarece pentru aducerea dipolului în câmpul magnetic $\vec{B}$ trebuie cheltuit lucrul mecanic necesar pentru a păstra curentul $\vec{J}$ (care îl produce pe $\vec{\mu}$) constant. Chiar dacă în final starea este staţionară, iniţial există o stare tranzitorie în care câmpul este variabil în timp. De fapt, modificarea energiei magnetice atunci când un obiect este plasat într-un câmp magnetic ale cărui surse sunt fixe (iniţial câmpurile sunt $\vec{H}_0$ şi $\vec{B}_0$, iar după introducerea obiectului acestea devin $\vec{H}$ şi respectiv $\vec{B}$) este dată de relaţia

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$W = \frac{1}{2}\int_{(V)} \left(\vec{B}\cdot\vec{H}_0 - \vec{H}\cdot\vec{B}_0\right) dV\,, \tag{22.2}$$

energie care, dacă obiectul este introdus într-un spațiu vid, poate fi exprimată în funcție de magnetizare (momentul magnetic pe unitatea de volum) astfel

$$W = \frac{1}{2}\int_{(V)} \vec{M}\cdot\vec{B}\, dV\,, \tag{22.3}$$

unde integrarea se face peste volumul obiectului.

Diferența dintre relația (22.3) (sau (22.2)) și (22.1) pentru un moment magnetic permanent într-un câmp magnetic exterior (mai puțin factorul 1/2 care apare datorită relației liniare presupuse între $\vec{M}$ și $\vec{B}$) provine din faptul că (22.3) este energia totală (necesară pentru a „produce" configurația dată), în timp ce (22.1) include numai lucrul mecanic efectuat pentru aducerea momentului magnetic permanent în câmp, însă nu și energia necesară creării momentului magnetic și păstrării lui permanente. Din acest motiv, cantității de energie dată de relația (22.1) i se spune (și ea chiar aceasta reprezintă) *energie potențială* și, evident, ea nu coincide cu energia totală, diferența fiind explicată mai sus.

Așadar, pentru a afla energia W dată de relația (22.1), trebuie determinată inducția câmpului magnetic extern în punctul în care se află particula, adică în vârful conului. Acest câmp magnetic este produs de curenții generați de mișcarea circulară și uniformă a sarcinilor electrice care umplu uniform conul.

Un element infinitezimal de volum al conului, $dV = rd\alpha drdz$ conține sarcina electrică infinitezimală (vezi figura 22.1)

$$dq\left(=d^3q\right) = \rho_e dV = \frac{Q}{V_{con}} rdrdzd\varphi = \frac{3Q}{\pi h^3} rdrdzd\varphi = \frac{3Q\omega}{\pi h^3} rdrdzdt\,, \tag{22.4}$$

unde ρ_e este densitatea volumică de sarcină electrică în interiorul conului. În plus, s-a ținut cont de faptul că viteza unghiulară de rotație a conului în jurul axei sale este $\omega = d\varphi/dt$. Notația dintre paranteze pentru cantitatea de sarcină electrică infinitezimală, d^3q, reprezintă scrierea riguros corectă din punct de vedere matematic a acestei mărimi fizice și scoate în evidență

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

faptul că aceasta este o mărime diferențială de ordinul trei (este produsul a trei cantități infinitezimale, sau, altfel spus, a trei diferențiale totale).

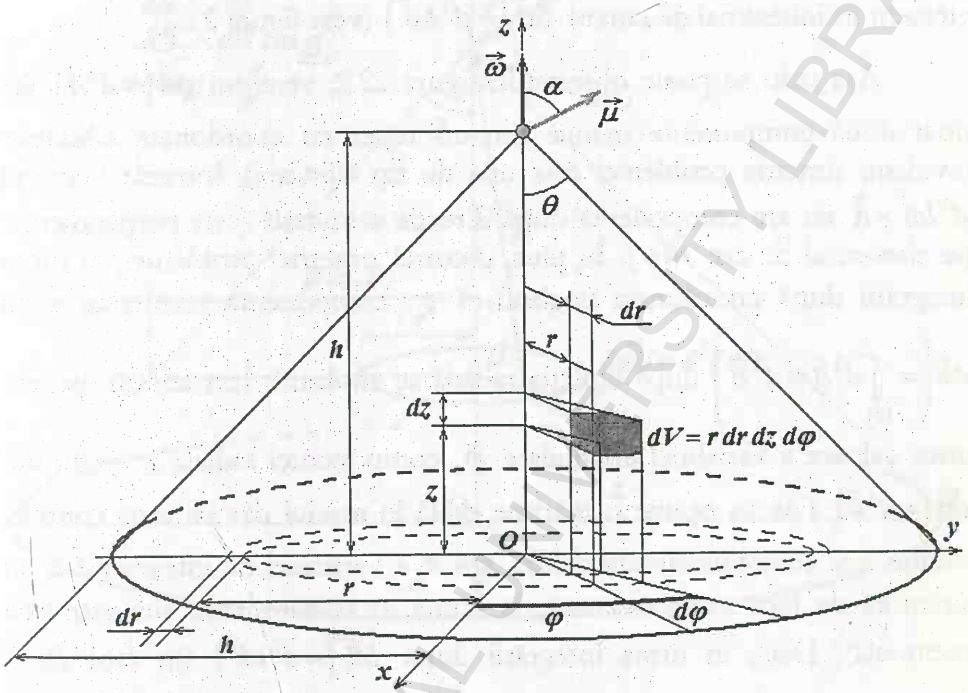


Fig. 22.1

Mișcarea de rotație uniformă a acestei cantități de sarcină electrică generează un curent electric de intensitate (infinitezimală)

$$I\left(=d^2I\right)=\frac{dq}{dt}\left(=\frac{d^3q}{dt}\right)=\frac{3Q\omega}{\pi h^3}rdrdz, \tag{22.5}$$

care va produce în vârful conului un câmp magnetic infinitezimal, a cărui inducție este dată de legea Biot-Savart-Laplace

$$d\vec{B}\left(=d^3\vec{B}\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}\left(=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d^2Id\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}\right), \tag{22.6}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $\vec{R}$ este vectorul de poziţie al vârfului conului (punctul în care se doreşte a fi calculat câmpul magnetic) faţă de „originea" vectorului element infinitezimal de curent $Id\vec{l}\left(=d^2Id\vec{l}\right)$ (vezi figura 22.2).

Aşa cum se poate observa în figura 22.2, vectorul $d\vec{B}\left(=d^3\vec{B}\right)$ are doar două componente nenule într-un reper cu coordonate cilindrice (evident, simetria problemei este una de tip cilindric), întrucât vectorul $d^2Id\vec{l}\times\vec{R}$ nu are componentă după direcţie azimutală (este perpendicular pe elementul de arc $rd\varphi$). În plus, datorită simetriei problemei, în urma integrării după coordonata unghiulară φ, componenta rezultantă a lui $d\vec{B}\left(=\int\limits_{(\varphi)}d^3\vec{B}=d^2\vec{B}\right)$ după direcţia radială se anulează. Într-adevăr, pentru orice valoare a variabilei unghiulare φ, componentei radiale a vectorului $d\vec{B}\left(=d^3\vec{B}\right)$ i se va opune o mărime egală în modul dar de sens contrar, anume, cea corespunzătoare valorii $\varphi+\pi$ a variabilei de integrare (să nu uităm ca de fapt integrarea este, la limită, o sumare, care aici este una vectorială). Deci, în urma integrării după $Id\vec{l}\left(=d^2Id\vec{l}\right)$ (în fapt după variabila unghiulară φ) rămâne doar componenta axială a inducţiei câmpului magnetic

$$B_z\left(=d^2B_z\right)=\left|\vec{B}\right|\cos\beta=B\frac{r}{R}. \qquad (22.7)$$

Pentru moment problema revine la a calcula inducţia câmpului magnetic produs de un curent circular (de o spiră) cu raza r, într-un punct situat pe semiaxa pozitivă a spirei, la înălţimea $\sqrt{R^2-r^2}$ faţă de planul orizontal al spirei. Conform legii Biot-Savart-Laplace, elementul de curent $Id\vec{l}$ al spirei de rază r parcursă de curentul staţionar de intensitate I din figura 22.3 produce în punctul P câmpul magnetic elementar de inducţie

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{R}}{R^3},$$

câmpul magnetic total/rezultant produs de întreaga spiră în P fiind

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

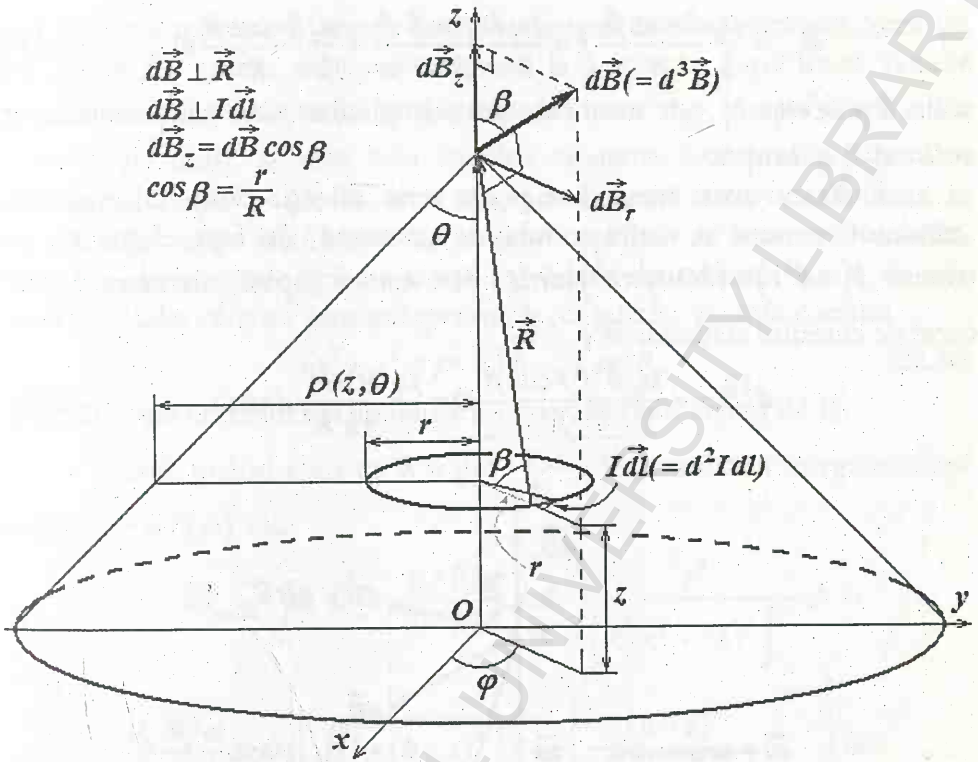


Fig. 22.2

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{(C)}\frac{Id\vec{l}\times\vec{R}}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{Ird\varphi\left(\hat{u}_\varphi\times\vec{R}\right)}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ir}{R^2}\hat{u}_B\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ir}{R^2}\hat{u}_B,$$

unde $\hat{u}_\varphi$ este versorul direcţiei azimutale, iar $\hat{u}_B = \hat{u}_\varphi \times \vec{R}$ este versorul vectorului $Id\vec{l}\times\vec{R}$ (vezi figura 22.3).

Având în vedere observaţia de mai sus legată de anularea componentei radiale rezultante a lui $\vec{B}$, urmează că inducţia câmpului magnetic rezultant creat de spiră în punctul P este

$$\left|\vec{B}_{rez}\right| = \vec{B}\cdot\hat{z} = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ir}{R^2}\left(\hat{u}_B\cdot\hat{z}\right) = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ir}{R^2}\cos\beta,$$

şi are aceeaşi direcţie şi sens cu axa Oz

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{B}_{rez} = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ir\cos\beta}{R^2}\hat{z} = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ir\cos\beta}{R^2}\frac{\vec{\omega}}{\omega} = \frac{\mu_0}{2}\frac{Ir\cos\beta}{R^2}\hat{\omega}, \qquad (22.8)$$

unde $\hat{\omega} = \vec{\omega}/\omega (= \hat{z})$ este versorul vitezei unghiulare, care aici coincide cu versorul $\hat{z}$ al axei Oz.

Utilizând acest rezultat se poate scrie inducția câmpului magnetic „rezultant" produs în vârful conului de „curentul" (în fapt, elementul de curent) $I(=d^2I) = (3Q\omega/\pi h^3) rdrdz$, care este o „spiră" elementară parcursă de curentul staționar d^2I

$$d^2\vec{B}_{rez} = \frac{\mu_0}{2}\frac{d^2I\ r\cos\beta}{R^2}\hat{\omega} = \frac{\mu_0}{2}\frac{3Q\omega r^3}{\pi h^3 R^3} drdz\hat{\omega}. \qquad (22.9)$$

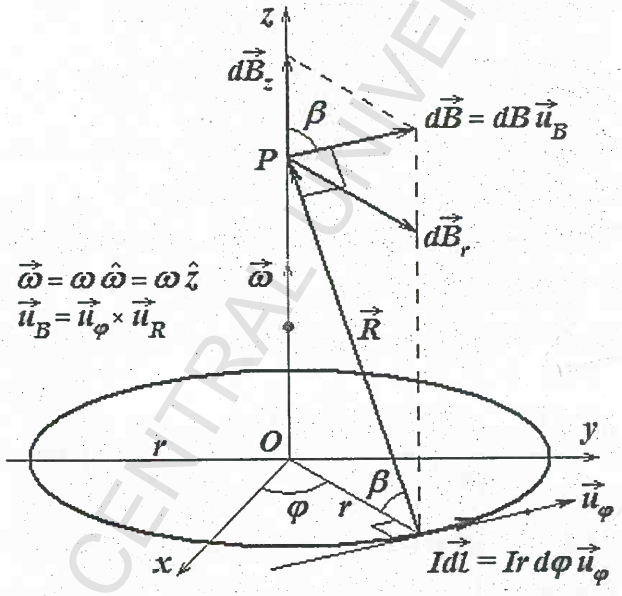


Fig. 22.3

Câmpul magnetic rezultant total, produs de întreg conul (de toate elementele de curent $Id\vec{l}\,(=d^2Id\vec{l})$ care sunt niște *sui-generis* spire elementare) se va obține atunci prin sumarea tuturor contribuțiilor aduse de toate aceste elemente infinitezimale de curent (care, pentru fiecare spiră elemen-

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

tară în parte reprezintă nişte curenţi staţionari de-sine-stătători), ceea ce, din punct de vedere matematic, revine la a integra după toate valorile posibile ale celor două variabile din expresia lui $d^2\vec{B}_{rez}$, anume, după r (de la 0 la ρ, unde ρ este raza spirelor tangente la suprafaţa laterală a conului) şi după z (de la 0 la h), adică, astfel încât să fie luate în consideraţie toate elementele de curent cuprinse în interiorul conului. Totodată, la integrare trebuie avută în vedere dependenţa lui R de cele două variabile, care nu sunt independente, ci satisfac ecuaţia conului

$$x^2+y^2=\rho^2=(h-z)^2\,tg^2\theta, \tag{22.10}$$

unde 2θ este deschiderea unghiulară a conului (vezi figura 22.1).

Astfel, ţinând cont că $R=\sqrt{r^2+(h-z)^2}$, rezultatul integralei după variabila $r=r(\rho)$ este

$$d\vec{B}_{rez}=\int_{(r)}d^2\vec{B}_{rez}=\frac{\mu_0}{2}\frac{3Q\omega}{\pi h^3}dz\hat{\omega}\int_0^{\rho}\frac{r^3}{\left[r^2+(h-z)^2\right]^{3/2}}dr=$$

$$\frac{\mu_0}{2}\frac{3Q\omega}{\pi h^3}dz\hat{\omega}\left\{\left[\sqrt{r^2+(h-z)^2}\right]_{r=0}^{r=\rho}+\left[\frac{(h-z)^2}{\sqrt{r^2+(h-z)^2}}\right]_{r=0}^{r=\rho}\right\}=$$

$$\frac{\mu_0}{2}\frac{3Q\omega}{\pi h^3}dz\hat{\omega}\,\frac{\left[\sqrt{\rho^2+(h-z)^2}-(h-z)\right]^2}{\sqrt{\rho^2+(h-z)^2}}=$$

$$\frac{\mu_0}{2}\frac{3Q\omega}{\pi h^3}dz\hat{\omega}\,\frac{\left[\sqrt{(h-z)^2tg^2\theta+(h-z)^2}-(h-z)\right]^2}{\sqrt{(h-z)^2tg^2\theta+(h-z)^2}}=$$

$$\frac{\mu_0}{2}\frac{3Q\omega}{\pi h^3}dz\hat{\omega}\,\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos\theta}(h-z).$$

În fine, integrarea acestei ultime expresii după variabila z conduce la inducţia câmpului magnetic rezultant produs de toţi curenţii elementari din con, în vârful conului

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{B}_{rez}=\int\limits_{(z)}d\vec{B}_{rez}(z)=\frac{\mu_0}{2}\frac{3Q\omega}{\pi h^3}\hat{\omega}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos\theta}\int\limits_0^h(h-z)\,dz=$$

$$\frac{\mu_0}{2}\frac{3Q\omega}{\pi h^3}\hat{\omega}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos\theta}\left(hz-\frac{z^2}{2}\right)_{z=0}^{z=h}=\frac{\mu_0}{2}\frac{3Q\omega}{\pi h^3}\hat{\omega}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos\theta}\frac{h^2}{2}=$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3Q\bar{\omega}}{h}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos\theta}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3Q\bar{\omega}}{h}\frac{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3Q\bar{\omega}}{h}\frac{3\sqrt{2}-4}{2}.$$

Aşadar, energia magnetică de interacţiune dintre particula cu momentul magnetic intern $\vec{\mu}$ şi câmpul magnetic generat de conul (încărcat electric) în mişcare este

$$W=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}\left(=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}_{rez}\right)=(-\vec{\mu})\cdot\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3Q\bar{\omega}}{h}\frac{3\sqrt{2}-4}{2}\right)=$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3Q\left(4-3\sqrt{2}\right)}{2h}(\vec{\mu}\cdot\vec{\omega})=\frac{3\left(4-3\sqrt{2}\right)\mu\mu_0\omega\,Q\cos\alpha}{8\pi h}, \tag{22.11}$$

unde α este unghiul dintre vectorii viteză unghiulară de rotaţie uniformă a conului în jurul axei proprii, $\vec{\omega}$, şi momentul magnetic intern al particulei din vârful conului, $\vec{\mu}$ (vezi figura 22.1).

Problema nr. 23

Se consideră o distribuţie oarecare (dar mărginită) de sarcini electrice în vid, W_0 fiind energia câmpului ei electrostatic. Dacă spaţiul este ocupat de un dielectric, care poate fi neomogen (şi chiar anizotrop), energia câmpului electrostatic al aceleiaşi distribuţii de sarcini va avea valoarea W. Să se arate că

$$\delta W=W-W_0=-\frac{1}{2}\int\vec{P}\cdot\vec{E}_0\,d\tau, \tag{23.1}$$

BCU IAŞI CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

unde $\vec{P}$ reprezintă polarizaţia dielectricului, iar $\vec{E}_0$ este intensitatea câmpului electrostatic iniţial.

Rezolvare

După cum se ştie din teoria câmpului electrostatic, în vid, energia acestui câmp este

$$W_0 = \frac{1}{2}\int \vec{E}_0 \cdot \vec{D}_0 \, d\tau, \tag{23.2}$$

iar în prezenţa unui dielectric

$$W = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}\, d\tau. \tag{23.3}$$

Deoarece distribuţia de sarcini electrice este aceeaşi (atât în vid, cât şi în dielectric) cele două câmpuri (în vid, şi respectiv în dielectric) satisfac ecuaţiile binecunoscute

$$\nabla\times\vec{E}_0 = 0, \quad \nabla\cdot\vec{D}_0 = \rho, \tag{23.4}$$

şi

$$\nabla\times\vec{E} = 0, \quad \nabla\cdot\vec{D} = \rho. \tag{23.5}$$

Atunci

$$\delta W = W - W_0 = \frac{1}{2}\int\left(\vec{E}\cdot\vec{D} - \vec{E}_0\cdot\vec{D}_0\right)d\tau = \frac{1}{2}\int\Big[\vec{E}\cdot\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right) + \vec{E}_0\cdot\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right) - \vec{P}\cdot\vec{E}_0\Big]\, d\tau, \tag{23.6}$$

unde, între paranteze, am scăzut şi am adunat expresia

$$\vec{E}\cdot\vec{D}_0 - \vec{E}_0\cdot\vec{D} = -\vec{P}\cdot\vec{E}_0$$

şi, de asemenea, am utilizat relaţiile $\vec{D}_0 = \varepsilon_0\vec{E}_0$ şi $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$.

În continuare vom arăta că $\int\vec{E}\cdot\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)d\tau = 0$. Într-adevăr, cum $\vec{E} = -grad\ V$, putem scrie

$$\vec{E}\cdot\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right) = (-grad\ V)\cdot\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right) = -div\Big[V\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)\Big] + V\underbrace{div\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)}_{=\rho-\rho\,=\,0} = -div\Big[V\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)\Big].$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aşadar,

$$\int\limits_{(\mathcal{D})} \vec{E}\cdot\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)d\tau = -\int\limits_{(\mathcal{D})} div\left[V\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)\right]d\tau = -\oint\limits_{(S_{\mathcal{D}})} V\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)\cdot d\vec{S} \to 0,$$

deoarece distribuţia de sarcini electrice fiind mărginită, V va scădea ca $\frac{1}{r}$ când $r\to\infty$, iar câmpul (deci şi $\vec{D}$ şi $\vec{D}_0$) ca $\frac{1}{r^2}$, astfel că produsul $d\vec{S}\cdot V\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)$ va varia ca $r^2\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r^2}=\frac{1}{r}\to 0$ când $r\to\infty$. În mod cu totul asemănător se poare arăta că şi $\int\vec{E}_0\cdot\left(\vec{D}-\vec{D}_0\right)d\tau=0$. În aceste condiţii, relaţia (23.6) capătă forma

$$\delta W = W - W_0 = -\frac{1}{2}\int\vec{P}\cdot\vec{E}_0\,d\tau,$$

ceea ce soluţionează cerinţa problemei.

Problema nr. 24

O distribuţie mărginită de curenţi electrici, $\vec{i}(x,y,z)$, produce în vid un câmp magnetic a cărui energie este W_0. Într-un mediu magnetizabil (neferomagnetic) aceeaşi distribuţie de curenţi produce un câmp a cărui energie totală este W. Să se arate că mediul contribuie la energie cu cantitatea $\delta W = W - W_0$, a cărei expresie este

$$\delta W = W - W_0 = \frac{1}{2}\int\vec{M}\cdot\vec{B}_0\,d\tau, \qquad (24.1)$$

unde $\vec{M}$ este vectorul magnetizare al mediului, iar $\vec{B}_0$ este vectorul inducţie magnetică al mediului iniţial (în vid).

Rezolvare

Să considerăm mai întâi câmpul magnetic creat de distribuţia de curenţi în vid. În acest caz avem

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\nabla\times\vec{H}_0=\vec{i},\ \nabla\cdot\vec{B}_0=0,\ \vec{B}_0=\nabla\times\vec{A}_0\ \text{şi}\ \vec{B}_0=\mu_0\vec{H}_0, \tag{24.2}$$

iar energia câmpului este

$$W_0=\frac{1}{2}\int\vec{H}_0\cdot\vec{B}_0\,d\tau\ . \tag{24.3}$$

Pentru câmpul creat de aceeaşi distribuţie de curenţi într-un mediu magnetizabil (izotrop sau anizotrop, dar neferomagnetic) avem

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{i},\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\ \text{şi}\ \vec{M}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{H}, \tag{24.4}$$

iar energia câmpului magnetic este

$$W=\frac{1}{2}\int\vec{H}\cdot\vec{B}\,d\tau\,. \tag{24.5}$$

Contribuţia mediului la energie va fi dată de relaţia

$$\delta W=W-W_0=\frac{1}{2}\int\left(\vec{H}\cdot\vec{B}-\vec{H}_0\cdot\vec{B}_0\right)d\tau\,. \tag{24.6}$$

Ţinând seama de expresia magnetizării [relaţia (24.4 – 4)] şi de faptul că $\vec{H}_0=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0$ [vezi relaţia (24.2 – 4)], integrandul din relaţia (24.6) poate fi transformat astfel

$$\begin{aligned}\vec{H}\cdot\vec{B}-\vec{H}_0\cdot\vec{B}_0&=\left(\vec{H}-\vec{H}_0\right)\cdot\vec{B}+\left(\vec{H}-\vec{H}_0\right)\cdot\vec{B}_0+\vec{H}_0\cdot\vec{B}-\vec{H}\cdot\vec{B}_0=\\&\left(\vec{H}-\vec{H}_0\right)\cdot\vec{B}+\left(\vec{H}-\vec{H}_0\right)\cdot\vec{B}_0+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}_0\cdot\vec{B}-\vec{H}\cdot\vec{B}_0=\\&\left(\vec{H}-\vec{H}_0\right)\cdot\vec{B}+\left(\vec{H}-\vec{H}_0\right)\cdot\vec{B}_0+\vec{M}\cdot\vec{B}_0.\end{aligned} \tag{24.7}$$

Atunci, relaţia (24.6) devine

$$\begin{aligned}\delta W=W-W_0=\frac{1}{2}\int\left(\vec{H}\cdot\vec{B}-\vec{H}_0\cdot\vec{B}_0\right)d\tau=\frac{1}{2}\int\left(\vec{H}-\vec{H}_0\right)\cdot\vec{B}\,d\tau+\cdot\\\frac{1}{2}\int\left(\vec{H}-\vec{H}_0\right)\cdot\vec{B}_0\,d\tau+\frac{1}{2}\int\vec{M}\cdot\vec{B}_0\,d\tau\,.\end{aligned} \tag{24.8}$$

Aşadar, pentru soluţionarea problemei rămâne de arătat că primele două integrale din membrul drept al acestei ultime relaţii sunt egale cu zero.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Într-adevăr, utilizând relațiile (24.2) și (24.4) și identitatea din analiza vectorială: $div(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot rot\,\vec{u} - \vec{u}\cdot rot\,\vec{v}$, putem scrie că

$$\int(\vec{H}-\vec{H}_0)\cdot\vec{B}\,d\tau = \int(\vec{H}-\vec{H}_0)\cdot rot\,\vec{A}\,d\tau = \int\limits_{(\mathcal{D})} div\left[\vec{A}\times(\vec{H}-\vec{H}_0)\right]d\tau +$$

$$\int\limits_{(\mathcal{D})}\vec{A}\cdot\underbrace{rot(\vec{H}-\vec{H}_0)}_{=\vec{i}-\vec{i}=0}d\tau = \int\limits_{(\mathcal{D})} div\left[\vec{A}\times(\vec{H}-\vec{H}_0)\right]d\tau =$$

$$\oint\limits_{(S_{\mathcal{D}})}\left[\vec{A}\times(\vec{H}-\vec{H}_0)\right]\cdot d\vec{S}\to 0\,,$$

unde am ținut cont de faptul că distribuția de curenți este aceeași atât în vid, cât și în mediul magnetizabil neferomagnetic $(rot\,\vec{H}_0 = rot\,\vec{H} = \vec{i})$ și, în plus, fiind mărginită, pentru $r\to\infty$, $\vec{A}\sim\frac{1}{r}$ și $\vec{H}-\vec{H}_0\sim\frac{1}{r^2}$, și cum $d\vec{S}\sim r^2$, atunci când $r\to\infty$, produsul $\left[\vec{A}\times(\vec{H}-\vec{H}_0)\right]\cdot d\vec{S}$ variază ca și $\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot r^2 = \frac{1}{r}\to 0$.

În mod cu totul asemănător se demonstrează faptul că și cea de-a doua integrală din membrul drept al relației (24.8) se anulează. Cu aceasta, problema este rezolvată complet.

Problema nr. 25

Să se arate că prezența corpurilor materiale într-un câmp electromagnetic poate fi complet descrisă prin introducerea în ecuațiile câmpului a unei densități de sarcină electrică adițională, $-\nabla\cdot\vec{P}$, și a unei densități de curent adițional, $\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\nabla\times\vec{M}$, unde $\vec{P}$ este polarizația electrică a mediului, iar $\vec{M}$ este magnetizația.

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

Relaţiile dintre intensitatea câmpului electric, inducţia câmpului electric şi polarizaţie – pe de o parte – şi intensitatea câmpului magnetic, inducţia câmpului magnetic şi magnetizaţie – pe de altă parte – sunt

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{25.1}$$

şi respectiv

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} . \tag{25.2}$$

Ecuaţiile care descriu câmpul sunt cele patru ecuaţii fundamentale ale lui Maxwell:

- legea inducţiei electro-magnetice: $\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$;
- legea inducţiei magneto-electrice: $\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$;
- teorema Gauss pentru câmpul electric: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ şi
- teorema Gauss pentru câmpul magnetic: $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

Prima şi ultima mai sunt cunoscute şi sub denumirea de ecuaţiile fără surse ale lui Maxwell, iar a doua şi a treia ca ecuaţiile cu surse ($\rho = \rho(\vec{r},\ t)$ este densitatea volumică a sarcinilor electrice, iar $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},\ t)$ este densitatea de curent).

Evident, ecuaţiile fără surse ale lui Maxwell rămân neschimbate atunci când se introduc diverse corpuri în câmpul electromagnetic. Cele care vor suferi modificări sunt celelalte două ecuaţii, adică cele cu surse.

Să ne referim mai întâi la ecuaţia a treia, adică teorema lui Gauss pentru câmpul electric

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho .$$

Dacă aici introducem pe $\vec{D}$ din (28.1), rezultă

$$\nabla \cdot \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right) = \rho ,$$

sau

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\nabla \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0} \equiv \frac{\rho + \rho_{ad}}{\varepsilon_0}, \tag{25.3}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde am introdus notația evidentă, $\rho_{ad} = -\nabla \cdot \vec{P}$. Comparând relația (25.3) cu relația care exprimă teorema lui Gauss pentru câmpul electric în vid, $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, se poate deduce cu ușurință faptul că prezența corpurilor în câmpul electromagnetic conduce la „apariția" unei densități de sarcină electrică adițională, $\rho_{ad} = -\nabla \cdot \vec{P}$.

Procedând într-o manieră asemănătoare cu cealaltă ecuație cu surse a lui Maxwell, legea inducției magneto-electrice

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

obținem

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j} + \frac{\partial \left(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \right)}{\partial t}, \tag{25.4}$$

unde, pentru a-l exprima pe $\vec{H}$, am folosit relația (25.2), iar $\vec{D}$ „a fost luat" din (25.1). Relația (25.4) se mai poate scrie și astfel

$$\nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M} \right) \equiv \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{j}_{ad} \right),$$

care, comparată cu legea inducției magneto-electrice pentru vid

$$\nabla \times \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j},$$

pune în evidență „apariția" unei densități de curent electric adițional, $\vec{j}_{ad} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \nabla \times \vec{M}$, atunci când în câmpul electromagnetic se introduce un corp.

Problema nr. 26

Un pendul matematic de lungime l dintr-un material conductor se mișcă astfel încât capătul lui inferior alunecă fără frecare pe un suport sub formă de arc de cerc, care are suprafața de contact, de asemenea, dintr-un material conductor. Brațul pendulului este rigid, are masa m și se mișcă

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

într-un câmp magnetic static de inducţie B, care are direcţia perpendiculară în orice punct pe braţ. Un capăt al suportului metalic şi punctul de sprijin al braţului pendulului sunt conectate prin intermediul unui condensator ideal de capacitate C, circuitul electric (de lungime variabilă datorită mişcării oscilatorii a pendulului) închizându-se prin braţul pendulului, ca în figura 26.1. Să se determine perioada pendulului, neglijând rezistenţa electrică şi inductanţa circuitului.

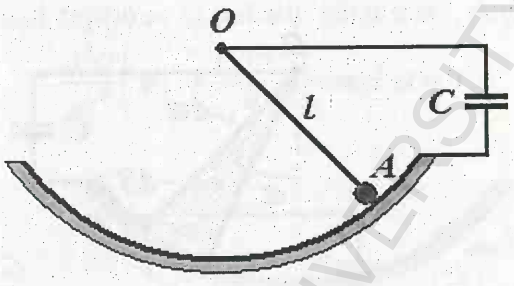


Fig. 26.1

Rezolvare

În intervalul infinitezimal de timp dt, braţul pendulului de lungime l parcurge pe circumferinţa cercului descris de capătul inferior al pendulului distanţa $ds = l\,d\alpha$ şi „mătură" suprafaţa de arie $dS = l\,ds/2 = l^2 d\alpha/2$ (vezi figura 26.2). Deoarece câmpul magnetic este orientat perpendicular în orice punct pe această suprafaţă, fluxul magnetic infinitezimal prin dS va fi $d\Phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = BdS = Bl^2 d\alpha/2$ şi, fiind variabil, induce în braţul pendulului tensiunea electromotoare

$$e = -d\Phi/dt = -\frac{Bl^2}{2}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\omega Bl^2}{2}, \qquad (26.1)$$

a cărei modul este $\mathcal{E} = |e| = Bl^2\omega/2$.

Această tensiune generează în circuitul din figura 26.1 un curent electric de intensitate

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}C\mathcal{E} = C\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{CBl^2}{2}\frac{d\omega}{dt} = \frac{CBl^2}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}. \qquad (26.2)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Conform legii lui Laplace, asupra braţului pendulului prin care circulă curentul I şi care se află în câmpul magnetic de inducţie B se exercită forţa

$$\left|\vec{F}_{em}\right| = \left|I\ \vec{l}\times\vec{B}\right| = IBl = \frac{CB^2l^3}{2}\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \tag{26.3}$$

care are direcţia şi sensul indicate în figura 26.3 şi punctul de aplicaţie în mijlocul segmentului $|OA|$.

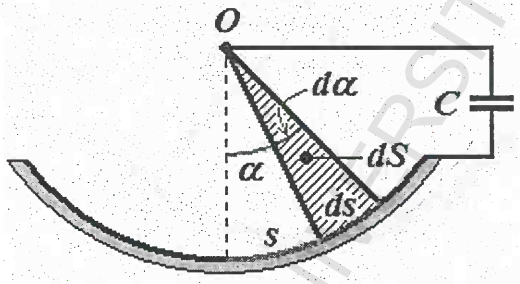


Fig. 26.2

Mişcarea pendulului va fi produsă atât de forţa de natură electromagnetică, de moment

$$\left|\vec{M}_{em}\right| \equiv M_{em} = \left|\vec{r}_B\times\vec{F}_{em}\right| = \frac{l}{2}F_{em} = \frac{CB^2l^4}{4}\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \tag{26.4}$$

unde $\vec{r}_B$ este vectorul de poziţie al punctului de aplicaţie al forţei $\vec{F}_{em}$ în raport cu centrul de rotaţie (punctul O), cât şi de forţa gravitaţională, al cărei moment are modulul

$$\left|\vec{M}_g\right| \equiv M_g = \left|\vec{r}_A\times\vec{F}_g\right| = \left|\vec{r}_A\times m\vec{g}\right| = lmg\sin\alpha, \tag{26.5}$$

unde $\vec{r}_A$ este vectorul de poziţie al punctului de aplicaţie al forţei gravitaţionale în raport cu acelaşi punct. Ecuaţia diferenţială a mişcării este atunci

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -M_g - M_{em} = -mgl\sin\alpha - \frac{CB^2l^4}{4}\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \tag{26.5}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $J = ml^2$ este momentul de inerţie al braţului pendulului în raport cu punctul O, iar momentele ambelor forţe au fost considerate cu semnul minus, deoarece ambele forţe sunt forţe „de revenire".

Ecuaţia (26.5) se mai poate scrie sub forma

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}\left(ml^2+\frac{CB^2l^4}{4}\right)+mgl\sin\alpha=0, \tag{26.6}$$

care, în limita unghiurilor mici de oscilaţie (când sinusul unghiului poate fi aproximat cu unghiul exprimat în radiani: $\sin\alpha\cong\alpha$), devine

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}\left(ml^2+\frac{CB^2l^4}{4}\right)+mgl\ \alpha=0. \tag{26.7}$$

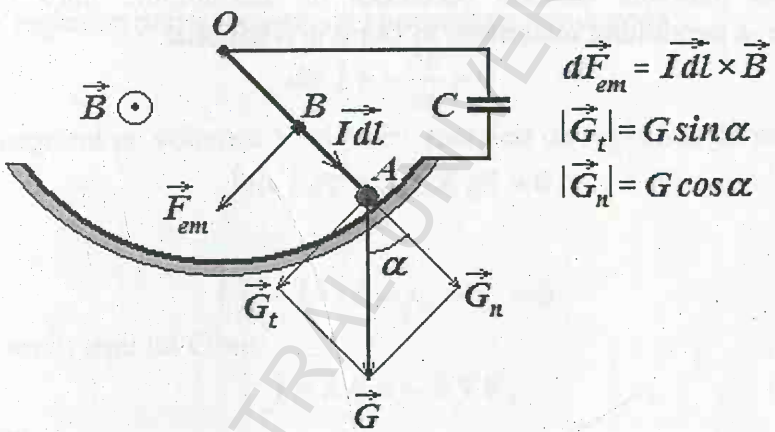


Fig. 26.3

Introducând notaţia

$$\omega^2 \overset{not}{=} \frac{mgl}{ml^2+\frac{CB^2l^4}{4}}=\frac{1}{\frac{l}{g}+\frac{CB^2l^3}{4mg}}=\frac{1}{\frac{l}{g}\left(1+\frac{CB^2l^2}{4m}\right)},$$

ecuaţia se rescrie

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\omega^2\alpha=0, \tag{26.8}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

care este binecunoscuta ecuație a oscilatorului liniar armonic, ale cărui oscilații se fac cu perioada

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1+\frac{CB^2l^2}{4m}\right)}, \tag{26.9}$$

în care termenul $\frac{CB^2l^2}{4m}$ din paranteză poate fi considerat ca o „corecție" adusă de efectele electromagnetice la cele ale câmpului gravitațional, întrucât, după cum se știe,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{26.10}$$

reprezintă perioada mișcării oscilatorii de amplitudine mică (oscilații izocrone) a pendulului matematic în câmp gravitațional.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

IV. CURENȚI STAȚIONARI ŞI CUASISTAȚIONARI

Problema nr. 27

Să se calculeze distribuția de curent (în regim staționar) într-o placă metalică dreptunghiulară, de grosime h şi conductivitate electrică λ. Electrozii prin care intră şi iese curentul, de intensitate I, sunt aplicați în centrele a două laturi opuse ale plăcii.

Rezolvare

În regim staționar, ecuația de continuitate conduce la

$$div\,\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{27.1}$$

Integrând pe volumul V al plăcii, mărginit de suprafața S, avem

$$\int_V div\,\vec{j}\; d\tau = \oint_S \vec{j}\cdot\vec{n}\; dS = 0,$$

sau

$$(\vec{j}_2 - \vec{j}_1)\cdot\vec{n} = j_{2n} - j_{1n} = 0. \tag{27.2}$$

Potrivit legii lui Ohm

$$\vec{j} = \lambda\vec{E} = -\lambda\,\nabla V, \tag{27.3}$$

mai avem

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \tag{27.4}$$

Inițial vom presupune că electrozii de intrare şi ieşire sunt „repartizați" (se extind) pe nişte regiuni (suprafețe) mici de întindere $2k$, caracterizare prin $|y| \le k$, unde k este o constantă pe care, la momentul potrivit, o vom face să tindă la zero (vezi figura 27).

Pentru a scrie condițiile la limită, observăm că $j_{2y} = j_{1y} = 0$, deci

$$j_y\Big|_{y=-b} = j_y\Big|_{y=+b} = -\lambda\frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_{y=-b} = -\lambda\frac{\partial V}{\partial y}\bigg|_{y=+b} = 0.$$

Apoi, deoarece curentul circulă de-a lungul axei Ox, rezultă

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$j_x\big|_{x=-a} = j_x\big|_{x=+a} = -\lambda\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=-a} = -\lambda\frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{x=+a} \equiv g(y) = \begin{cases} \dfrac{I}{2hk}, & |y| < k, \\ 0, & |y| > k. \end{cases}$$

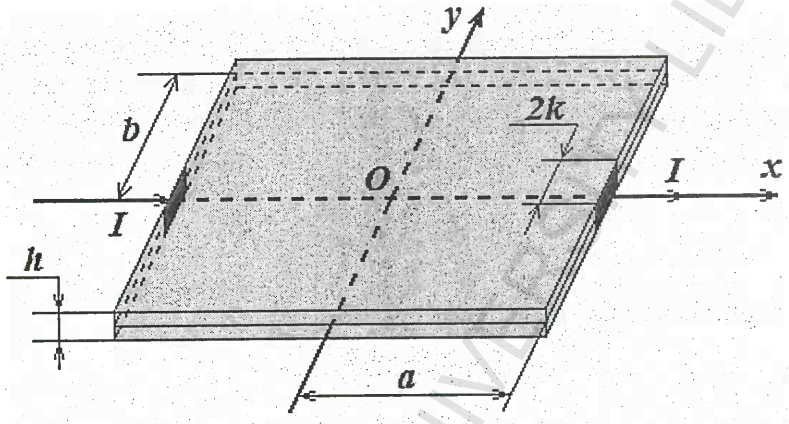


Fig. 27

Aşadar, condiţiile la limită pentru ecuaţia (27.4) se scriu astfel

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=-b} = \left(\dfrac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=+b} = 0\,; \\ \left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=-a} = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=+a} = f(y) = \begin{cases} -\dfrac{I}{2hk\lambda}, & |y| \le k; \\ 0, & |y| > k, \end{cases} \end{cases} \tag{27.5}$$

Dată fiind simetria problemei faţă de axa Ox, potenţialul $V(x,y)$ trebuie să fie o funcţie pară de y, adică trebuie să fie exprimat printr-o serie de forma

$$V(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \tag{27.6}$$

Se observă că această alegere satisface condiţiile la limită în punctele $y = \pm b$.

Apoi, întrucât

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n''(x) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

și

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} u_n(x) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right),$$

din (27.4) rezultă următoarea ecuație pentru funcția $u_n(x)$:

$$u_n''(x) - \frac{n^2\pi^2}{b^2} u_n(x) = 0. \tag{27.7}$$

Deoarece soluțiile ecuației caracteristice atașate ecuației diferențiale (27.7) sunt reale, soluția generală a acesteia din urmă este

$$u_n(x) = a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) + b_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b} x\right), \quad (n \in \mathbb{Z},\ n > 0). \tag{27.8}$$

Pentru $n = 0$ ecuația (27.7) devine $u_0''(x) = 0$, cu soluția

$$u_0 = a_0 x + b_0. \tag{27.9}$$

Constantele b_n trebuie să fie toate zero, deoarece, tot din motive de simetrie, linia $x = 0$ este, evident, echipotențială și, fără a restrânge generalitatea problemei, putem presupune potențialul nul pe ea. Deci, pentru soluția „singulară" $u_0(x)$ vom cere ca

$$u_0(x = 0) = 0 \ \Rightarrow \ u_0(x) = a_0 x,$$

iar pentru soluția generală $u_n(x)$ $(n > 0)$ avem

$$u_n(x = 0) = 0 \ \Rightarrow \ b_n = 0 \ \Rightarrow \ u_n(x) = a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right), \ (n > 0).$$

Prin urmare, soluția finală a ecuației (27.4) este

$$V = V(x, y) = a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right). \tag{27.10}$$

Condițiile la limită pentru $x = \pm a$ ne conduc la

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=-a} \left(= \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=+a} \right) = a_0 + \frac{\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b} a\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) = f(y),$$

relație care, integrată după y între limitele 0 și b, conduce la

BCU ALEXANDRU IOAN CUZA UNIVERSITY LIBRARY

$$\int_0^b f(y)dy = \int_0^b \left[a_0 + \frac{\pi}{b}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]dy = a_0 b + \frac{\pi}{b}\times$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)\underbrace{\int_0^b \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy}_{=0} = a_0 b\ ,$$

de unde

$$a_0 = \frac{1}{b}\int_0^b f(y)dy = \frac{1}{b}\left[\int_0^k f(y)dy + \int_k^b f(y)dy\right] =$$

$$\frac{1}{b}\left[-\frac{I}{2hk\lambda}\int_0^k dy + \int_k^b 0\, dy\right] = -\frac{I}{2hb\lambda}. \qquad (27.11)$$

Pentru a determina restul constantelor a_n $(n=1,2,3,...)$ vom înmulți relația de mai sus $\left[a_0 + \frac{\pi}{b}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = f(y)\right]$ cu $\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$ şi vom integra la fel (după variabila y între limitele 0 şi b) şi vom ține cont de relația de ortogonalitate

$$\int_0^b \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy = \frac{b}{2}\delta_{mn}.$$

Avem

$$\int_0^b \left[a_0 + \frac{\pi}{b}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\right]\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy =$$

$$\int_0^b f(y)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy,$$

sau

$$a_0 \underbrace{\int_0^b \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy}_{=0} + \frac{\pi}{b}\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)\underbrace{\int_0^b \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy}_{=\frac{b}{2}\delta_{mn}} =$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int_0^b f(y)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy=\int_0^k f(y)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy+\int_k^b f(y)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy,$$

sau, încă

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[na_n\cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)\delta_{mn}\right]=\frac{\pi}{2}ma_m\cosh\left(\frac{m\pi}{b}a\right)=-\frac{I}{2hk\lambda}\times$$

$$\int_0^k\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy+\underbrace{\int_k^b 0\cdot\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)dy}_{=0}=-\frac{I}{2hk\lambda}\frac{b}{m\pi}\left[\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\right]_{y=0}^{y=k}=$$

$$-\frac{I}{2hk\lambda}\frac{b}{m\pi}\sin\left(\frac{m\pi}{b}k\right),$$

de unde

$$a_m=-\frac{I}{\pi mh\lambda}\frac{1}{\cosh\left(\frac{m\pi}{b}a\right)}\frac{\sin\left(\frac{m\pi}{b}k\right)}{\frac{m\pi}{b}k},$$

care, la limita când $k\to 0$, devine

$$a_n=-\frac{I}{\pi nh\lambda}\frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)}\lim_{k\to 0}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{b}k\right)}{\frac{n\pi}{b}k}=$$

$$-\frac{I}{\pi nh\lambda}\frac{1}{\cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)},\quad (n=1,2,3,...). \tag{27.12}$$

Cu aceasta, toate constantele a_n $(n=0,1,2,3,...)$ sunt determinate, iar expresia finală a potențialului $V(x,y)$ rezultă prin introducerea lui a_0 din (27.11) și a lui a_n din (27.12) în (27.10); se obține

$$V(x,y)=-\frac{I}{2hb\lambda}\left[x+\frac{2b}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}{n\cosh\left(\frac{n\pi}{b}a\right)}\right]. \tag{27.13}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Atunci, conform legii lui Ohm sub formă locală, distribuția de curent în placă va fi dată de relația

$$\vec{j} = -\lambda \, grad \, V ,$$

sau, pe componente,

$$\begin{cases} j_x(x, y) = -\lambda \dfrac{\partial V(x, y)}{\partial x}, \\ j_y(x, y) = -\lambda \dfrac{\partial V(x, y)}{\partial y}, \\ j_z(x, y) = -\lambda \dfrac{\partial V(x, y)}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

unde $V = V(x, y)$ este dat de relația (27.13). Calcule simple conduc la

$$\begin{cases} j_x(x, y) = \dfrac{I}{2hb} + \dfrac{I}{hb} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cosh\left(\dfrac{n\pi}{b} x\right) \cos\left(\dfrac{n\pi}{b} y\right)}{\cosh\left(\dfrac{n\pi}{b} a\right)}, \\ j_y(x, y) = -\dfrac{I}{hb} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sinh\left(\dfrac{n\pi}{b} x\right) \sin\left(\dfrac{n\pi}{b} y\right)}{\cosh\left(\dfrac{n\pi}{b} a\right)}, \\ j_z = -\lambda \dfrac{\partial V}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Problema nr. 28

Să se calculeze distribuția de curent (în regim staționar) pentru o placă metalică circulară de rază a şi conductivitate λ. Electrozii prin care intră şi iese curentul, de intensitate I, sunt aplicați în două puncte diametral opuse (vezi figura 28.1).

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

În interiorul discului potențialul satisface ecuația lui Laplace. Simetria problemei „cere" utilizarea coordonatelor polare plane, r și φ.

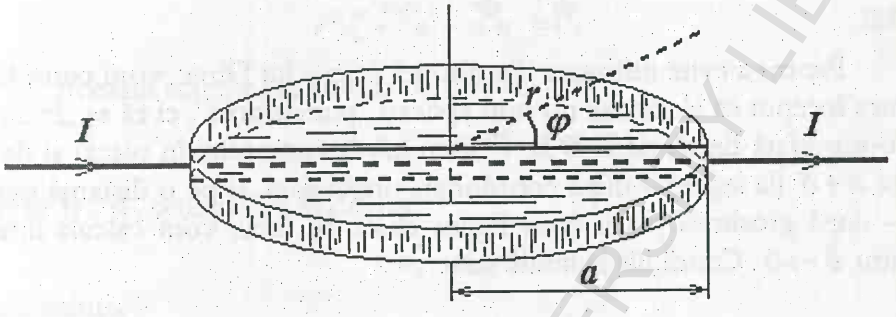


Fig. 28.1

Potențialul $V(r,\varphi)$ satisface ecuația Laplace în coordonate polare $(0 \le \varphi < 2\pi)$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=0, \qquad (28.1)$$

unde operatorul lui Laplace în coordonate polare plane a fost considerat ca rezultând din expresia corespunzătoare coordonatelor cilindrice, în care s-a eliminat formal contribuția adusă de coordonata z (coordonatele polare plane se pot obține din cele cilindrice punând formal $z=0$)

$$(\Delta\bullet)_{cil}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\bullet}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bullet}{\partial\varphi}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\bullet}{\partial z}\right)\right]\xrightarrow[\text{+ eliminarea termenului în } z]{\rho\to r}$$

$$(\Delta\bullet)_{pol.plane}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\bullet}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\bullet}{\partial\varphi}\right)\right]=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\bullet}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\bullet}{\partial\varphi^2}.$$

Atunci, ecuația Laplace în coordonate polare plane se va scrie astfel

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=0,$$

sau, echivalent,

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}=0.$$

Pentru a evita utilizarea distribuției delta a lui Dirac, vom considera pentru început că electrozii nu sunt aplicați „punctiform", ci că se „întind" pe o suprafață finită: de la 0 la δ (la intrarea curentului în placă) şi de la π la $\pi+\delta$ (la ieşire) – după coordonata unghiulară, şi pe o distanță mică, h – după grosimea plăcii (vezi figura 28.2). În final, vom calcula limita pentru $\delta \to 0$. Condițiile la limită sunt

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi) = \begin{cases} -\dfrac{I}{\lambda h a \delta}, & 0<\varphi<\delta, \\ +\dfrac{I}{\lambda h a \delta}, & \pi<\varphi<\pi+\delta, \\ 0, & \text{pentru celelalte unghiuri}. \end{cases} \qquad (28.2)$$

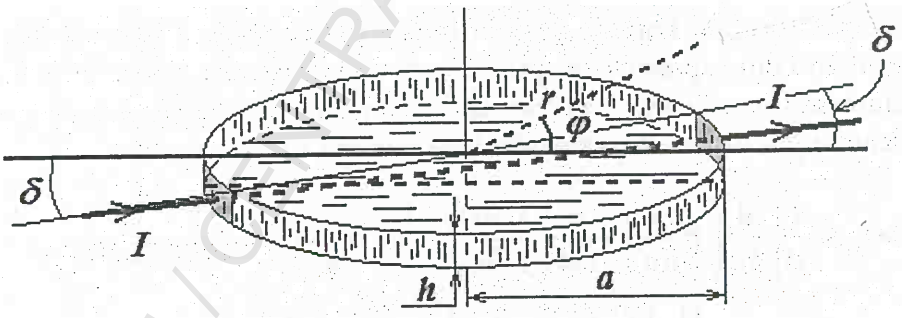


Fig. 28.2

Simetria problemei cere ca potențialul să fie o funcție pară de φ; vom alege această funcție de forma

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$V(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r)\cos n\varphi. \tag{28.3}$$

Impunând ca „soluția" (28.3) să verifice ecuația Laplace (28.1), va rezulta o ecuație de tip Euler pentru necunoscuta $u_n(r)$

$$r^2u_n''+ru_n'-n^2u_n=0. \tag{28.4}$$

Această ecuație are soluția de forma

$$u_n(r)=a_nr^n+b_nr^{-n}\quad (n>0). \tag{28.5}$$

Pentru $n=0$, ecuația (28.4) devine

$$r\,u_n''+u_n'=0$$

și are soluția

$$u_0=a_0+b_0\ln r. \tag{28.6}$$

După cum se poate constata cu ușurință, soluțiile (28.5) și (28.6) diverg în $r=0$. Pentru a elimina aceste divergențe trebuie să considerăm $b_n=0$ $(n=0,1,2,...)$. Prin urmare, potențialul $V(r,\varphi)$ [dat de relația (28.3)] capătă forma mai simplă,

$$V(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,r^n\cos n\varphi. \tag{28.7}$$

Pentru $n=0$ se constată că $V(r,\varphi)=a_0=const.$, astfel că soluția problemei poate fi scrisă sub forma

$$V(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,r^n\cos n\varphi+const., \tag{28.8}$$

unde constanta „const." se poate determina prin alegerea convenabilă a punctului de referință (căruia, prin convenție i se asociază valoarea zero a potențialului).

Coeficienții a_n, $(n=1,2,3,...)$ se determină din condițiile la limită

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=a}=f(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_na^{n-1}\cos n\varphi. \tag{28.9}$$

Înmulțind relația (28.9) cu $\cos m\varphi$ și integrând în raport cu variabila φ între 0 și 2π obținem

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos m\varphi\, d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n a^{n-1} \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi\, d\varphi =$$

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n a_n a^{n-1} \delta_{mn} = \pi m a_m a^{m-1},$$

(unde am utilizat relația de ortogonalitate $\int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi\, d\varphi = \pi\, \delta_{mn}$), de unde

$$a_n = \frac{1}{n\pi a^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi = \frac{1}{n\pi a^{n-1}} \left[\int_0^{\delta} \left(-\frac{I}{\lambda h a \delta} \right) \cos n\varphi\, d\varphi + \right.$$

$$\underbrace{\int_{\delta}^{\pi} 0 \cdot \cos n\varphi\, d\varphi}_{=0} + \int_{\pi}^{\pi+\delta} \frac{I}{\lambda h a \delta} \cos n\varphi\, d\varphi + \underbrace{\left. \int_{\pi+\delta}^{2\pi} 0 \cdot \cos n\varphi\, d\varphi \right]}_{=0} = \frac{1}{n\pi a^{n-1}} \times$$

$$\left[\left(\frac{-I}{\lambda h a \delta} \right) \frac{1}{n} (\sin n\varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\delta} + \frac{I}{\lambda h a \delta} \frac{1}{n} (\sin n\varphi) \Big|_{\varphi=\pi}^{\varphi=\pi+\delta} \right] = \frac{1}{n\pi a^{n-1}} \left[\frac{-I}{\lambda h a} \frac{\sin n\delta}{n\delta} + \right.$$

$$\left. \frac{I}{\lambda h a} \frac{\cos n\pi \sin n\delta}{n\delta} \right] = \frac{1}{n\pi a^n} \frac{I}{\lambda h} \left[-1 + (-1)^n \right] \frac{\sin n\delta}{n\delta}. \tag{28.10}$$

Trecând la limita $\delta \to 0$, rezultă

$$a_n = \frac{1}{n\pi a^n} \frac{I}{\lambda h} \left[(-1)^n - 1 \right] \quad (n = 1,2,3,\ldots). \tag{28.11}$$

Introducând constantele (28.11) în (28.8), obținem

$$V(r,\varphi) = \frac{I}{\pi \lambda h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^n - 1 \right] \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos n\varphi + \text{const.} \tag{28.12}$$

Dar, pentru $r < a$, avem

$$r^2 - 2ar\cos\varphi + a^2 = a^2 \left(\frac{r^2}{a^2} - 2\frac{r}{a}\cos\varphi + 1 \right) = a^2 \left(1 - \frac{r}{a} e^{i\varphi} \right) \left(1 - \frac{r}{a} e^{-i\varphi} \right),$$

unde am ținut cont de faptul că $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi$. Logaritmând rădăcina pătrată a relației precedente, rezultă

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\ln\left(r^2-2ar\cos\varphi+a^2\right)^{1/2}=\ln a+\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{r}{a}e^{i\varphi}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{r}{a}e^{-i\varphi}\right)=$$

$$\ln a-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n e^{in\varphi}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n e^{-in\varphi}=\ln a-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n\varphi\,, \tag{28.13}$$

unde am folosit dezvoltarea în serie Mac-Laurin a funcției $\ln(1-x)$: $\ln(1-x)=-\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, serie de puteri care este convergentă numai dacă $|x|<1$. Evident, pentru a obține relația (28.13), x trebuie luat de forma $x=\frac{r}{a}e^{i\varphi}$ și respectiv, $x=\frac{r}{a}e^{-i\varphi}$, expresii care satisfac cerința de convergență numai dacă $r<a$ (deoarece $\left|e^{\pm i\varphi}\right|=1$, $\forall\varphi\in\mathbb{R}$), ceea ce am presupus încă de la bun început.

Apelînd la dezvolarea în serie Mac-Laurin a funcției $\ln(1+x)$: $\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$, în mod analog se poate deduce că

$$\ln\left(r^2+2ar\cos\varphi+a^2\right)^{1/2}=\ln a-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n\varphi\,. \tag{28.14}$$

În acest mod, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n-1\right]\frac{1}{n}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n\varphi=\ln a-\ln\left(r^2+2ar\cos\varphi+a^2\right)^{1/2}+$$

$$\ln\left(r^2-2ar\cos\varphi+a^2\right)^{1/2}-\ln a=\ln\frac{\left(r^2-2ar\cos\varphi+a^2\right)^{1/2}}{\left(r^2+2ar\cos\varphi+a^2\right)^{1/2}}=$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{r^2-2ar\cos\varphi+a^2}{r^2+2ar\cos\varphi+a^2}$$

și atunci

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$V(r,\varphi)=\frac{I}{2\pi\lambda h}\ln\left(\frac{r^2-2ar\cos\varphi+a^2}{r^2+2ar\cos\varphi+a^2}\right)+\text{const.}, \qquad (28.15)$$

sau

$$V(r,\varphi)=\frac{I}{\pi\lambda h}\ln\frac{r_1}{r_2}+\text{const.}, \qquad (28.16)$$

unde r_1 şi r_2 sunt distanţele până la cei doi electrozi (cel de ieşire, respectiv cel de intrare – vezi figura 28.3).

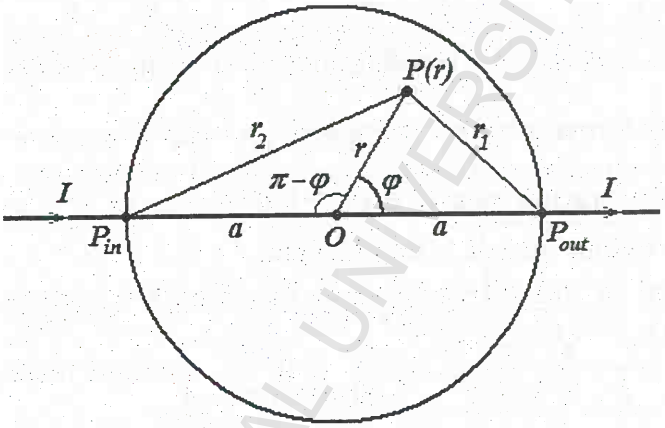


Fig. 28.3

$$\begin{cases} r_1^2=r^2+a^2-2ra\cos\varphi, \\ r_2^2=r^2+a^2-2ra\cos(\pi-\varphi)=r^2+a^2+2ra\cos\varphi. \end{cases}$$

Atunci, conform legii lui Ohm sub formă locală, distribuţia de curent în disc va fi dată de relaţia

$$\vec{j}=-\lambda\ grad\ V,$$

sau, pe componente,

$$\begin{cases} j_r(r,\ \varphi)=-\lambda\dfrac{\partial V(r,\ \varphi)}{\partial r}, \\ j_\varphi(r,\ \varphi)=-\dfrac{\lambda}{r}\dfrac{\partial V(r,\ \varphi)}{\partial\varphi}, \end{cases}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $V = V(r,\ \varphi)$ este dat de relația (28.15). Calcule simple conduc la

$$\begin{cases} j_r(r,\ \varphi) = \dfrac{2I}{\pi ah} \dfrac{\left(r^2 - a^2\right)\cos\varphi}{4r^2\cos^2\varphi - \left(\dfrac{r^2}{a} + a\right)^2}, \\ j_\varphi(r,\ \varphi) = \dfrac{2I}{\pi ah} \dfrac{\left(r^2 + a^2\right)\sin\varphi}{4r^2\cos^2\varphi - \left(\dfrac{r^2}{a} + a\right)^2}. \end{cases}$$

Problema nr. 29

Un curent staționar de intensitate I intră într-un conductor cilindric de rază a și înălțime $2b$ printr-una din baze și iese prin cealaltă. Să se determine distribuția curentului în cilindru, presupunând că electrozii sunt aplicați în centrele bazelor.

Rezolvare

Simetria problemei impune, evident, utilizarea coordonatelor cilindrice; vom considera axa Oz în lungul axei conductorului cilindric (vezi figura 29.1). Ecuația Laplace în coordonatele cilindrice r, φ și z se scrie (vezi Anexa D)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \qquad (29.1)$$

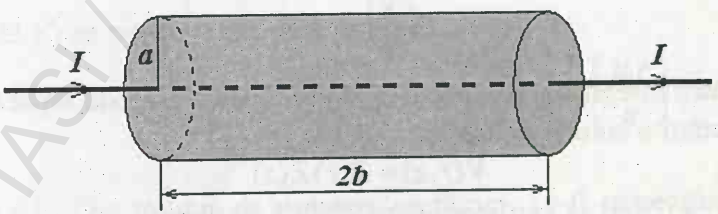


Fig. 29.1

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Întrucât, din motive de simetrie, potențialul V nu depinde de coordonata φ, soluția ecuației Laplace va avea forma $V = V(r,z)$ şi va satisface ecuația Laplace „simplificată"

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0. \qquad (29.1')$$

Presupunem că electrozii sunt mici discuri de rază h (vezi figura 29.2), urmând ca la momentul potrivit să trecem la limita $h \to 0$.

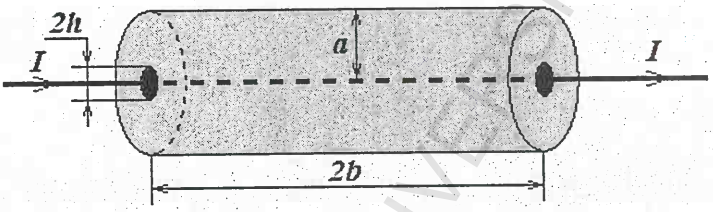


Fig. 29.2

Având în vedere legea lui Ohm sub formă locală $\left(\vec{j} = \lambda \vec{E} = -\lambda grad\ V\right)$ şi ecuația de trecere pentru densitatea de curent $\left(j_{2n} - j_{1n} = 0\right.$, unde $\vec{n}$ este versorul normalei la suprafața de separație, dirijat de la mediul 1 către mediul 2) condițiile la limită se vor scrie sub forma

$$\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=-b} = \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=+b} = f(r) = \begin{cases} -\dfrac{I}{\lambda \pi h^2}, & r < h, \\ 0, & r > h, \end{cases} \qquad (29.2)$$

şi

$$\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=a} = 0. \qquad (29.3)$$

Pentru integrarea ecuației (29.1') vom utiliza metoda separării variabilelor; căutăm o soluție de forma

$$V(r,z) = R(r)Z(z). \qquad (29.4)$$

Impunând ca (29.4) să verifice ecuația (29.1'), obținem

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$R'' + \frac{1}{r}R' + m^2 R = 0 \tag{29.5}$$

și

$$Z'' - m^2 Z = 0, \tag{29.6}$$

unde m^2 este constanta introdusă la „separarea" ecuației (29.1'). Ecuația (29.5) este chiar ecuația funcțiilor Bessel de ordinul zero și argument mr. Soluția ei nesingulară este $R(r) = J_0(mr)$, iar condiția la limită pentru $r = a$ determină valorile posibile ale lui m. Într-adevăr, din (29.3) și (29.4) rezultă că trebuie să avem

$$mJ_0'(ma) = 0, \tag{29.7}$$

sau

$$mJ_1(ma) = 0.$$

Prin urmare, ma trebuie să fie o rădăcină a ecuației $xJ_1(x) = 0$. Această ecuație admite o infinitate de rădăcini

$$\mu_0 (= 0) < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_i < \cdots$$

iar valorile posibile ale lui m sunt

$$m = \frac{\mu_i}{a} \quad (i = 0, 1, 2, ...).$$

Atunci, ecuația (29.6) devine

$$Z'' - \left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2 Z = 0 \tag{29.8}$$

și are soluția

$$Z(z) = c_i \sinh\left(\frac{\mu_i z}{a}\right) + d_i \cosh\left(\frac{\mu_i z}{a}\right), \quad (i > 0). \tag{29.9}$$

Pentru $i = 0$ se obține simplu: $Z(z) = c_0 z + d_0$. Astfel, soluția generală a ecuației (29.1') se poate reprezenta prin seria

$$V(r, z) = c_0 z + \sum_{i=1}^{\infty} \left[c_i \sinh\left(\frac{\mu_i z}{a}\right) + d_i \cosh\left(\frac{\mu_i z}{a}\right) \right] J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right) + const., \tag{29.10}$$

cu $J_1(\mu_i) = 0$. Din motive de simetrie, secțiunea $z = 0$ reprezintă o suprafață echipotențială. Alegerea acestui nivel ca nivel de referință pentru

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

potențial conduce la anularea tuturor coeficienților d_i $(i=1,2,3,...)$. Prin urmare, $V(r,\ z)$ capătă expresia mai simplă

$$V(r,\ z)=c_0 z+\sum_{i=1}^{\infty} c_i \sinh\left(\frac{\mu_i z}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right). \qquad (29.10')$$

În acest fel, au rămas nedeterminate doar constantele c_i $(i=0,\ 1,2,...)$. Pentru a le găsi vom utiliza condițiile la limită (29.2)

$$\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=\pm b} = f(r)=c_0+\sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{\mu_i}{a}\cosh\left(\frac{\mu_i b}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right). \qquad (29.11)$$

Înmulțind ambii membri ai acestei relații cu r şi integrând între 0 şi a, obținem

$$\int_0^a r f(r)dr = c_0 \int_0^a r\ dr+\sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{\mu_i}{a}\cosh\left(\frac{\mu_i b}{a}\right)\int_0^a r\ J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)dr,$$

sau

$$\int_0^h r f(r)dr+\int_h^a r f(r)dr = c_0\frac{a^2}{2}+\sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{\mu_i}{a}\cosh\left(\frac{\mu_i b}{a}\right)\left[\frac{a^2}{\mu_i}J_1(\mu_i)\right],$$

iar de aici

$$-\frac{I}{\pi h^2\lambda}\frac{h^2}{2}=c_0\frac{a^2}{2} \quad\Rightarrow\quad c_0=-\frac{I}{\pi a^2\lambda}, \qquad (29.12)$$

unde am avut în vedere relația (29.2), precum şi faptul că $J_1(\mu_i)=0$.

Pentru a afla restul constantelor c_i $(i=1,2,...)$ vom înmulți relația (29.11) cu $r\ J_0\left(\frac{\mu_j r}{a}\right)$ şi vom integra din nou între 0 şi a. Rezultă

$$\int_0^a r f(r)J_0\left(\frac{\mu_j r}{a}\right)dr = c_0\int_0^a r\ J_0\left(\frac{\mu_j r}{a}\right)dr+\sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{\mu_i}{a}\cosh\left(\frac{\mu_i b}{a}\right)\times \int_0^a r\ J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)J_0\left(\frac{\mu_j r}{a}\right)dr. \qquad (29.13)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dar $\int_0^a r\, J_0\left(\frac{\mu_j r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{\mu_j} J_1(\mu_j) = 0$, căci $J_1(\mu_j) = 0$ și, în plus, avem relația de ortogonalitate a funcțiilor Bessel

$$\int_0^a r\, J_\nu\left(\frac{\mu_i r}{a}\right) J_\nu\left(\frac{\mu_j r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2}\left[J_\nu^2(\mu_i) + J_{\nu-1}(\mu_i) J_{\nu+1}(\mu_i)\right] \delta_{ij}, \text{ (f.s.)}.$$

Particularizând relația de mai sus pentru funcțiile Bessel de ordinul zero ($\nu = 0$) și ținând cont că în cazul nostru μ_j sunt soluții ale ecuației $J_1(\mu_j) = 0$, avem

$$\int_0^a r\, J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_j r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} J_0^2(\mu_i)\, \delta_{ij},$$

astfel că (29.13) devine

$$\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\mu_j r}{a}\right) dr = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{\mu_i}{a} \cosh\left(\frac{\mu_i b}{a}\right) \frac{a^2}{2} J_0^2(\mu_i)\, \delta_{ij} =$$

$$c_j \frac{\mu_j a}{2} \cosh\left(\frac{\mu_j b}{a}\right) J_0^2(\mu_j),$$

sau, dacă avem în vedere faptul că

$$\int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\mu_j r}{a}\right) dr = \int_0^h r f(r) J_0\left(\frac{\mu_j r}{a}\right) dr + \int_h^a r f(r) J_0\left(\frac{\mu_j r}{a}\right) dr =$$

$$\int_0^h r f(r) J_0\left(\frac{\mu_j r}{a}\right) dr = -\frac{I}{\pi h^2 \lambda} \int_0^h r\, J_0\left(\frac{\mu_j r}{a}\right) dr = -\frac{I}{\pi h^2 \lambda} \frac{ah}{\mu_j} J_1\left(\frac{\mu_j h}{a}\right),$$

obținem

$$-\frac{I}{\pi h^2 \lambda} \frac{ah}{\mu_j} J_1\left(\frac{\mu_j h}{a}\right) = c_j \frac{\mu_j a}{2} \cosh\left(\frac{\mu_j b}{a}\right) J_0^2(\mu_j) \Rightarrow$$

$$c_j = -\frac{2I J_1\left(\frac{\mu_j h}{a}\right)}{\pi h \lambda\, \mu_j^2 \cosh\left(\frac{\mu_j b}{a}\right) J_0^2(\mu_j)} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots). \tag{29.14}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY
FIZICĂ

Trecând acum la limita $h \to 0$ în relația (29.14) rezultă că pentru $i = 1,2,3,\ldots$, avem

$$c_i = \frac{-2I}{\pi a \lambda \cosh\left(\frac{\mu_i b}{a}\right) \mu_i J_0^2(\mu_i)} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{J_1\left(\frac{\mu_i h}{a}\right)}{\frac{\mu_i h}{a}}}_{=1/2} = \frac{-I}{\pi a \lambda \cosh\left(\frac{\mu_i b}{a}\right) \mu_i J_0^2(\mu_i)}. \tag{29.15}$$

Înlocuind constanta c_0 [dată de relația (29.15)] și c_i $(i = 1,2,3,\ldots)$ [date de relațiile (29.15)] în relația (29.10'), rezultă

$$V(r, z) = -\frac{I}{\pi a \lambda}\left[\frac{z}{a} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\sinh\left(\frac{\mu_i z}{a}\right)}{s_i J_0^2(\mu_i)\cosh\left(\frac{\mu_i b}{a}\right)}\right], \tag{29.16}$$

și atunci

$$\begin{cases} j_r = -\lambda\left[\partial V(r, z)/\partial r\right], \\ j_\varphi = -\frac{\lambda}{r}\left[\partial V(r, z)/\partial \varphi\right] = 0, \\ j_z = -\lambda\left[\partial V(r, z)/\partial z\right], \end{cases}$$

cu $V = V(r, z)$ dat de (29.16). Calcule simple conduc la

$$\begin{cases} j_r(r, z) = -\frac{I}{\pi a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\sinh\left(\frac{\mu_i z}{a}\right)}{J_0^2(\mu_i)\cosh\left(\frac{\mu_i b}{a}\right)}, \\ j_\varphi = 0, \\ j_z(r, z) = \frac{I}{\pi a^2}\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_i r}{a}\right)\cosh\left(\frac{\mu_i z}{a}\right)}{J_0^2(\mu_i)\cosh\left(\frac{\mu_i b}{a}\right)}\right]. \end{cases}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 30

Un condensator cu capacitatea C_1 este legat în paralel cu o bobină cu inductanța L_1 și întreg ansamblul este conectat în serie cu o altă bobină cu inductanța L_2 și un al doilea condensator cu capacitatea C_2, ca în Figura 30.1. Utilizând legile lui Kirchhoff deduse în cadrul formalismului lagrangean bazat pe analogia dintre sistemele mecanice și cele electrice, să se stabilească ecuația diferențială satisfăcută de cantitatea de sarcină electrică de pe armăturile condensatorului C_2, $q_2(t)$, știind că la momentul inițial $q_2(0)=q_0$, iar condensatorul cu capacitatea C_1 era neîncărcat ($q_1(0)=0$).

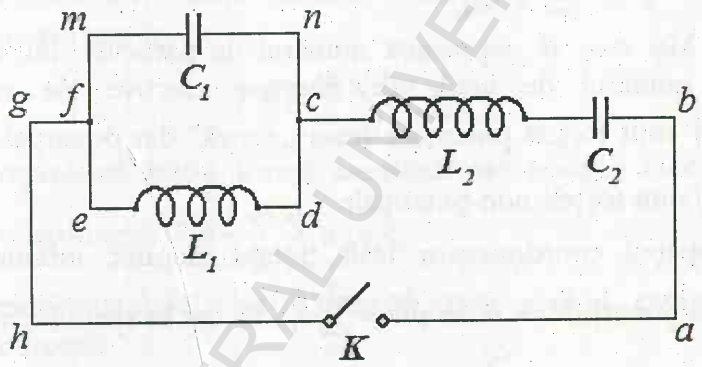


Fig. 30.1

Rezolvare

Analogia dintre circuitele electrice care conțin rezistoare, bobine, condensatoare și surse de tensiune electromotoare și sistemele mecanice de particule a fost identificată pentru prima dată de către James Clerk Maxwell și ea permite aplicarea formalismului lagrangean în studiul sistemelor electrice. Întrucât rezistoarele sunt elemente disipative de circuit, iar rezistența electrică și conductanța (inversul rezistenței electrice) au ca și corespondent – în cadrul analogiei amintite anterior – coeficientul forței de frecare (care este o forță disipativă), pentru a stabili relațiile care

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

stau la baza analogiei în discuție va trebui să apelăm la formalismul lagrangean pentru sistemele mecanice în care sunt prezente forțe non-potențiale de putere negativă (forțe disipative).

După cum se știe din cadrul mecanicii analitice, formalismul lagrangean pentru sistemele în care acționează forțe non-potențiale se bazează pe ecuațiile Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\tilde{\Phi}_k,\quad \left(k=\overline{1,n}\right), \tag{30.1}$$

unde q_k sunt coordonatele generalizate, $L=T-V$ este lagrangeanul sistemului „format" doar cu ajutorul forțelor potențiale $\vec{F}_i=-grad_i\, V$ $\left(i=\overline{1,N}\right)$, iar $\tilde{\Phi}_k=\sum_{i=1}^{N}\tilde{\vec{F}}_i\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ sunt forțele generalizate non-potențiale. Mai sus, N reprezintă numărul de particule din sistem, n reprezintă numărul de grade de libertate efective ale sistemului, $\vec{F}_i$ $\left(i=\overline{1,N}\right)$ sunt forțele potențiale (care „derivă" din potențialul V), iar $\tilde{\vec{F}}_i$ $\left(i=\overline{1,N}\right)$ sunt forțele non-potențiale.

În spațiul coordonatelor reale, lucrul mecanic infinitezimal al forțelor non-potențiale se scrie $\delta\tilde{W}=\sum_{i=1}^{N}\tilde{\vec{F}}_i\cdot\delta\vec{r}_i$, iar în spațiul configurațiilor (spațiul coordonatelor generalizate) se scrie $\delta\tilde{W}=\sum_{k=1}^{n}\tilde{\Phi}_k\delta q_k$.

Cu ajutorul acestui lucru mecanic se poate scrie puterea $\tilde{P}$ a forțelor non-potențiale sub forma

$$\tilde{P}\equiv\frac{\delta\tilde{W}}{\delta t}=\sum_{i=1}^{N}\tilde{\vec{F}}_i\cdot\vec{v}_i=\sum_{k=1}^{n}\tilde{\Phi}_k\dot{q}_k\,. \tag{30.2}$$

Forțele non-potențiale a căror putere este negativă, $\tilde{P}<0$, se numesc *forțe disipative*; un exemplu remarcabil de astfel de forță este *forța de frecare*. Un alt exemplu special de forțe non-potențiale sunt *forțele giroscopice* (cele pentru care puterea $\tilde{P}$ este nulă).

Dacă vitezele particulelor nu sunt prea mari, atunci forțele de frecare sunt proporționale cu vitezele

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\tilde{\vec{F}}_i \equiv \vec{F}_i^{\,f} = -k\,\vec{v}_i \quad \left(i=\overline{1,N};\ k>0\right), \tag{30.3}$$

caz în care există o funcție scalară $\mathcal{T}$, a cărei expresie este

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}k\sum_{i=1}^{N}\left|\vec{v}_i\right|^2, \tag{30.4}$$

astfel încât se poate scrie formal

$$\vec{F}_i^{\,f} = -\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \vec{v}_i} = -\nabla_{\vec{v}_i}\mathcal{T} \quad \left(i=\overline{1,N}\right), \tag{30.5}$$

unde $\nabla_{\vec{v}_i}$ desemnează formal derivata parțială în raport cu viteza $\vec{v}_i$. Funcția scalară $\mathcal{T}$ astfel definită se numește *funcția de disipație Rayleigh* și pentru sistemele scleronome ea este o funcție pătratică și omogenă de vitezele generalizate $\dot{q}_k$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \tag{30.6}$$

adică se reprezintă într-o formă asemănătoare energiei cinetice pentru sistemele scleronome: $T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k$.

Semnificația fizică a lui $\mathcal{T}$ poate fi găsită scriind expresia puterii forțelor de frecare

$$\tilde{P}^f = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,f}\cdot\vec{v}_i = -k\sum_{i=1}^{N}\left|\vec{v}_i\right|^2 = -2\mathcal{T},$$

adică $\mathcal{T}$ reprezintă jumătate din puterea dezvoltată de forțele de frecare.

Forțele generalizate asociate forțelor de frecare sunt

$$\tilde{\Phi}_k^f = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\,f}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k} = -\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{q}_k} \quad \left(k=\overline{1,n}\right), \tag{30.7}$$

și atunci, ecuațiile lui Lagrange de speța a doua pentru sistemele în care sunt prezente și forțe non-potențiale (30.1) se scriu – în acest caz particular – astfel

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{q}_k} = 0 \quad \left(k=\overline{1,n}\right). \tag{30.8}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să revenim acum la problema analogiei dintre sistemele mecanice de particule şi circuitele electrice şi să stabilim cele două legi fundamentale ale lui Kirchhoff în cadrul formalismului lagrangean.

1°. *Legea ochiurilor de reţea.*

În ceea ce priveşte această lege, analogia dintre sistemele mecanice de particule şi circuitele electrice conduce la următoarele corespondenţe între mărimile mecanice şi cele electrice

Coordonata generalizată $q(t)$	$\rightarrow$	*Sarcina electrică* $q(t)$
Viteza generalizată $\dot{q}(t)$	$\rightarrow$	*Curentul electric* $I(t)$
Forţa externă periodică F	$\rightarrow$	*Tensiunea electromotoare* $\mathcal{E}(t)$
Masa m	$\rightarrow$	*Inductanţa* L
Constanta elastică k	$\rightarrow$	*Elastanţa* S
Constanta forţei de amortizare r	$\rightarrow$	*Rezistenţa electrică* R
Energia cinetică T	$\rightarrow$	*Energia magnetică* W_{mag}
Energia potenţială V	$\rightarrow$	*Energia electrică* W_{el}

Conform analogiei amintite anterior, un circuit electric poate fi privit ca un sistem mecanic oscilant cu n grade de libertate, supus la două forţe potenţiale şi o forţă non-potenţială (disipativă). Energia potenţială a sistemului (circuitului) este

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}S_{ij}q_iq_j-\sum_{i=1}^{n}q_i\mathcal{E}_i(t), \tag{30.9}$$

unde $W_{el}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}S_{ij}q_iq_j$ este energia electrică a circuitului (fără a ţine seama de sursele care o generează), în care coeficienţii S_{ij} – numiţi *elastanţe* – reprezintă inversul capacităţilor: $\left[S_{ij}\right]=\left[C_{ij}^{-1}\right]$, iar $\sum_{i=1}^{n}q_i\mathcal{E}_i(t)$ reprezintă energia electrică totală furnizată de sursele de tensiune electromotoare din circuit. Mărimile C_{ij} sunt *coeficienţii de influenţă*, iar pentru $i=j$, $C_{ii}\equiv C_i$ se numesc *coeficienţi de capacitate* sau *capacităţi*. În

BCUIAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

relația (30.9) n reprezintă numărul de conductoare din circuit. Energia magnetică a circuitului este

$$W_{mag} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j , \tag{30.10}$$

unde M_{ij} este *inductanța mutuală* a ochiurilor de rețea i și j $\left(i, j = \overline{1,n}\right)$. Pentru $i = j$, $M_{ii} \equiv L_i$ se numește *self-inductanța* (*inductanța proprie* a) ochiului de rețea i. Atragem atenția asupra faptului că aici n reprezintă numărul de ochiuri ale circuitului. Acest lucru este important căci, chiar dacă în expresia finală a legii ochiurilor de rețea s-a folosit pentru simplitate, în mod formal, același n pentru toți termenii, atunci când se scrie în mod concret această lege pentru un ochi de rețea care face parte dintr-o rețea mai complicată, trebuie avut în vedere faptul că pentru fiecare termen al sumei, n ia valori diferite deoarece, în general, curentul $I_k = \dot{q}_k$ nu este același prin toate ramurile ochiului de rețea respectiv.

Întrucât elementele disipative din circuit sunt rezistoarele, funcția de disipație Rayleigh se va scrie în acest caz astfel

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j , \tag{30.11}$$

în care R_{ij} sunt niște coeficienți constanți strâns legați de rezistențele rezistoarelor din circuit. Pentru $i = j$, $R_{ii} \equiv R_i$ este *rezistența electrică* a ochiului de rețea i.

Cu ajutorul acestor elemente, conform corespondențelor prezentate anterior se poate construi lagrangeanul circuitului electric, care se va scrie astfel

$$L(=T-V) = W_{mag} - W_{el} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - S_{ij}q_iq_j\right) + \sum_{i=1}^{n} q_i\mathcal{E}_i(t) . \tag{30.12}$$

În acord cu aceleași corespondențe, utilizând relațiile (30.11) și (30.12), ecuațiile Lagrange de speța a II-a (30.8) sunt

$$\sum_{k=1}^{n}\left(M_{ik}\ddot{q}_k + R_{ik}\dot{q}_k + S_{ik}q_k\right) = \mathcal{E}_i(t) \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{30.13}$$

căci

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j-S_{ij}q_iq_j\right)+\sum_{i=1}^{n}q_i\mathcal{E}_i(t)\right]=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(M_{ij}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_j+M_{ij}\dot{q}_i\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(M_{ij}\delta_{ik}\dot{q}_j+M_{ij}\dot{q}_i\delta_{jk}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}M_{kj}\dot{q}_j+\sum_{i=1}^{n}M_{ik}\dot{q}_i\right]=\sum_{j=1}^{n}M_{kj}\dot{q}_j=\sum_{i=1}^{n}M_{ki}\dot{q}_i\ ,$$

unde, în al doilea termen al sumei din ultima paranteză s-a schimbat în mod convenabil indicele de sumare şi s-a folosit proprietatea de simetrie a inductanţelor mutuale, $M_{jk}=M_{kj}$. Apoi,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}M_{ki}\dot{q}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}M_{ki}\ddot{q}_i\ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(M_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j-S_{ij}q_iq_j\right)+\sum_{i=1}^{n}q_i\mathcal{E}_i(t)\right]=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}S_{ij}q_iq_j+\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n}q_i\mathcal{E}_i(t)\right)=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(S_{ij}\frac{\partial q_i}{\partial q_k}q_j+S_{ij}q_i\frac{\partial q_j}{\partial q_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial q_i}{\partial q_k}\mathcal{E}_i(t)=$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(S_{ij}\delta_{ik}q_j+S_{ij}q_i\delta_{jk}\right)+\sum_{i=1}^{n}\delta_{ik}\mathcal{E}_i(t)=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}S_{kj}q_j-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}S_{ik}q_i+\ \mathcal{E}_k(t)=$$

$$-\sum_{i=1}^{n}S_{ik}q_i+\mathcal{E}_k(t)=-\sum_{i=1}^{n}S_{ki}q_i+\mathcal{E}_k(t),$$

unde au fost utilizate aceleaşi artificii simple ca şi pentru calculul derivatei $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$. În sfârşit, avem şi

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_k}=\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}R_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(R_{ij}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_j+R_{ij}\dot{q}_i\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(R_{ij}\delta_{ik}\dot{q}_j+R_{ij}\dot{q}_i\delta_{jk}\right)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}R_{kj}\dot{q}_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}R_{ik}\dot{q}_i=\sum_{i=1}^{n}R_{ik}\dot{q}_i=\sum_{i=1}^{n}R_{ki}\dot{q}_i,$$

unde, din nou, s-au folosit aceleaşi artificii ca mai sus. Înlocuind aceste rezultate în relaţia (30.8) se obţine

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}+\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_k}=0=\sum_{i=1}^{n}M_{ki}\ddot{q}_i+\sum_{i=1}^{n}S_{ki}q_i-\mathcal{E}_k(t)+\sum_{i=1}^{n}R_{ki}\dot{q}_i=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(M_{ki}\ddot{q}_i+R_{ki}\dot{q}_i+S_{ki}q_i\right)-\mathcal{E}_k(t)\quad\left(k=\overline{1,n}\right),$$

sau, echivalent,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(M_{ik}\ddot{q}_k+R_{ik}\dot{q}_k+S_{ik}q_k\right)=\mathcal{E}_i(t)\quad\left(i=\overline{1,n}\right),$$

adică exact relația (30.13), care reprezintă *legea ochiurilor de rețea* (mai exact, pentru ochiul de rețea i) a lui Kirchhoff. Cum $\dot{q}_k=I_k$ (unde I_k este curentul prin ochiul k, considerat același în orice punct al acestui ochi de rețea), o formă echivalentă a acestei legi este următoarea

$$\sum_{k=1}^{n}\left(M_{ik}\frac{dI_k}{dt}+R_{ik}I_k+S_{ik}\int I_k dt\right)=\mathcal{E}_i(t)\quad\left(i=\overline{1,n}\right).\qquad(30.14)$$

Evident, atunci când această lege se aplică în mod efectiv, trebuie ținut cont de faptul că, în general, curenții diferă de la o ramură la alta a unui ochi de rețea, dacă acesta nu este singular, ci face parte dintr-o rețea mai complexă.

2^o. *Legea nodurilor de rețea*

Fie un nod de rețea a unui circuit electric, în care se întâlnesc n ramuri de rețea. Dacă tensiunea la bornele tuturor ramurilor este aceeași, egală cu $U(t)$, atunci corespondențele dintre mărimile asociate sistemelor mecanice și circuitelor electrice – în acest caz – sunt:

Coordonata generalizată q_k	$\rightarrow$	*Tensiunea electrică* $U(t)$
Viteza generalizată $\dot{q}(t)$	$\rightarrow$	*Derivata temporală a tensiunii* $\frac{dU(t)}{dt}$
Forța externă F	$\rightarrow$	*Derivata temporală a curentului* $\frac{dI(t)}{dt}$
Masa m	$\rightarrow$	*Capacitatea electrică* C
Constanta elastică k	$\rightarrow$	*Inversul inductanței* $L=1/L$
Constanta forței de amortizare r	$\rightarrow$	*Conductanța* $\lambda=1/R$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Energia cinetică T $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}C_{ik}\dot{U}_i\dot{U}_k$

Energia potențială V $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}L_{ik}U_iU_k-\sum_{i=1}^{n}U_i\frac{dI_i}{dt}$

Funcția de disipație Rayleigh $\mathcal{T}$ $\rightarrow$ $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ik}\dot{U}_i\dot{U}_k$

Ținând cont de aceste corespondențe, lagrangeanul sistemului este

$$L(=T-V)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(C_{ik}\dot{U}_i\dot{U}_k-L_{ik}U_iU_k\right)+\sum_{i=1}^{n}U_i\frac{dI_i}{dt} \qquad (30.15)$$

și, folosind funcția de disipație Rayleigh și ecuațiile Lagrange de speța a II-a (30.8), rezultă

$$\sum_{k=1}^{n}\left(C_{ik}\ddot{U}_k+\lambda_{ik}\dot{U}_k+L_{ik}U_k\right)=\frac{dI_i}{dt}\ \left(i=\overline{1,n}\right), \qquad (30.16)$$

relație care, integrată în raport cu timpul conduce la

$$\sum_{k=1}^{n}\left(C_{ik}\dot{U}_k+\lambda_{ik}U_k+L_{ik}\int U_k dt\right)=I_i(t)\ \left(i=\overline{1,n}\right), \qquad (30.17)$$

și exprimă *legea nodurilor de rețea* (mai exact, pentru nodul de rețea i) a lui Kirchhoff.

Pentru ochiurile de rețea *abcdefgha* și *abcnmfgha* ale circuitului din figura 30.2. legea (30.14) se scrie astfel

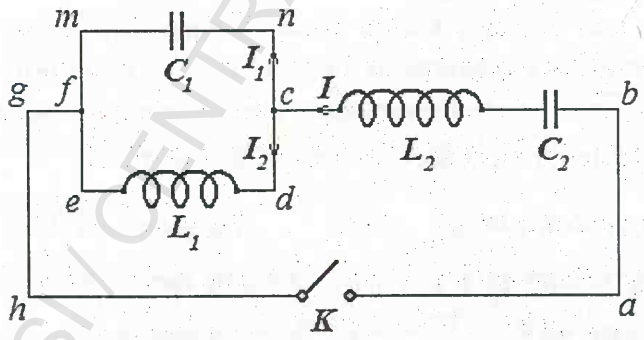


Fig. 30.2

$$L_2\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C_2}\int I\,dt+L_1\frac{dI_2}{dt}=0, \qquad (30.18)$$

respectiv

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$L_2\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C_2}\int I\,dt+\frac{1}{C_1}\int I_1\,dt=0. \qquad (30.19)$$

A doua lege a lui Kirchhoff pentru unul din cele două noduri de rețea ale circuitului poate fi scrisă mai ușor dacă circuitul este desenat ca în figura 30.3. După cum se poate cu ușurință observa din această figură, pe ramurile de rețea *fc* și *ed* este aceeași cădere de tensiune, $U(t)$, iar în nodul *c* intră curentul $I(t)$. În aceste condiții este aplicabilă legea (30.17), care se scrie astfel

$$C_1\frac{dU}{dt}+\frac{1}{L_1}\int U\,dt=I(t). \qquad (30.20)$$

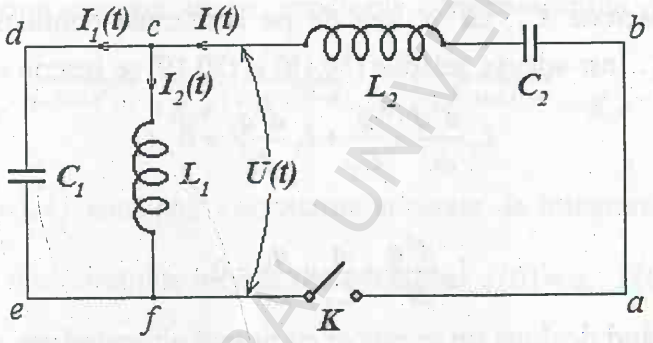


Fig. 30.3

Dar, după cum se știe, căderea de tensiune pe un condensator este $U=\frac{q}{C}$, unde q este sarcina electrică de pe armăturile condensatorului, iar C este capacitatea acestuia. Scriind această relație pentru condensatorul C_1 din figura 30.3 și derivând-o în raport cu timpul, se obține

$$U=\frac{q_1}{C_1}\Rightarrow\frac{dU}{dt}=\frac{1}{C_1}\frac{dq_1}{dt}=\frac{1}{C_1}I_1(t)\Rightarrow I_1(t)=C_1\frac{dU}{dt}. \qquad (30.21)$$

În mod asemănător, căderea de tensiune U pe o bobină cu inductanța L este $U=L\,dI/dt$. Deci, pentru bobina cu inductanța L_1 din circuitul din figura 30.3 se poate scrie

BUCHAREST CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$U(t)=L_1\frac{dI_2}{dt}\ \Rightarrow\ \frac{dI_2}{dt}=\frac{U(t)}{L_1}\ \Rightarrow\ I_2(t)=\frac{1}{L_1}\int U\,dt\,. \qquad (30.22)$$

Introducând (30.21) şi (30.22) în (30.20), rezultă că

$$I_1(t)+I_2(t)=I(t), \qquad (30.23)$$

adică legea nodurilor (aplicată pentru nodul de reţea c, din circuitul din figura 30.3) în forma „clasică". Nu trebuie însă să pierdem din vedere faptul că această relaţie a fost dedusă în mod consecvent, prin intermediul formalismului lagrangean, aşa cum cere enunţul problemei.

Relaţiile (30.18), (30.19) şi (30.23) astfel obţinute conduc rapid şi simplu la soluţia problemei, dacă ţinem cont că $I=dq/dt$, $I_1=dq_1/dt$ şi $I_2=dq_2/dt$, unde q este sarcina electrică de pe armăturile condensatorului de capacitate C_2, iar q_1 cea de pe armăturile condensatorului de capacitate C_1. Într-adevăr, relaţiile (30.18) şi (30.19) se rescriu astfel

$$L_2\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C_2}+L_1\frac{d^2q_2}{dt^2}=0 \qquad (30.24)$$

şi respectiv

$$L_2\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C_2}+\frac{q_1}{C_1}=0\,. \qquad (30.25)$$

Derivând de două ori în raport cu timpul ultima relaţie, se obţine

$$L_2\frac{d^4q}{dt^4}+\frac{1}{C_2}\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C_1}\frac{d^2q_1}{dt^2}=0\ \Rightarrow\ \frac{d^2q_1}{dt^2}=-C_1\left(L_2\frac{d^4q}{dt^4}+\frac{1}{C_2}\frac{d^2q}{dt^2}\right),$$

care, adunată cu d^2q_2/dt^2 din (30.24), conduce la

$$\frac{d^2q_1}{dt^2}+\frac{d^2q_2}{dt^2}=-C_1\left(L_2\frac{d^4q}{dt^4}+\frac{1}{C_2}\frac{d^2q}{dt^2}\right)-\frac{1}{L_1}\left(L_2\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C_2}\right).$$

Ţinând acum cont de (30.23), rezultă în final

$$\frac{d^2q}{dt^2}=-C_1\left(L_2\frac{d^4q}{dt^4}+\frac{1}{C_2}\frac{d^2q}{dt^2}\right)-\frac{1}{L_1}\left(L_2\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{C_2}\right), \qquad (30.26)$$

sau

$$L_1L_2C_1C_2\frac{d^4q}{dt^4}+(L_1C_1+L_2C_2+L_1C_2)\frac{d^2q}{dt^2}+q=0, \qquad (30.27)$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar de aici

$$\frac{d^4q}{dt^4}+2A\frac{d^2q}{dt^2}+Bq=0, \tag{30.28}$$

unde $A=\dfrac{L_1C_1+L_2C_2+L_1C_2}{2L_1L_2C_1C_2}>0$ și $B=\dfrac{1}{L_1L_2C_1C_2}>0$.

Ecuația (30.28) este o ecuație diferențială ordinară, omogenă, cu coeficienți constanți în necunoscuta $q=q(t)$. Ecuația caracteristică atașată acesteia este

$$r^4+2Ar^2+B=0$$

și are soluțiile $(r)_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{(r^2)_{1,2}}=\pm\sqrt{-A\pm\sqrt{A^2-B}}$. Atunci, variația temporală a sarcinii electrice de pe armăturile condensatorului de capacitate C_2 este

$$q(t)=K_1e^{t\sqrt{-A+\sqrt{A^2-B}}}+K_2e^{t\sqrt{-A-\sqrt{A^2-B}}}+K_3e^{-t\sqrt{-A+\sqrt{A^2-B}}}+K_4e^{-t\sqrt{-A-\sqrt{A^2-B}}}, \tag{30.29}$$

unde $K_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$ sunt patru constante arbitrare de integrare, care pot fi determinate din condițiile inițiale (de exemplu: $q(0)=q_0$, $I(0)=\dfrac{dq}{dt}(0)=0$, $\dfrac{d^2q}{dt^2}(0)=0$ și $\dfrac{d^3q}{dt^3}(0)=0$).

Problema nr. 31

O sursă cu tensiunea electromotoare $\mathcal{E}$ și rezistența internă R este conectată în paralel cu o bobină de inductanță L și un condensator de capacitate C, ca în figura 31.1. Să se determine dependența de timp a curentului electric prin sursă, $I=I(t)$, care se stabilește în circuit după închiderea întrerupătorului K, utilizând formalismul lagrangean bazat pe analogia dintre sistemele mecanice de puncte materiale și circuitele electrice. Bobina și condensatorul sunt presupuse ideale.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

Aplicând legea ochiurilor de rețea a lui Kirchhoff dedusă în problema precedentă, $\sum_{k=1}^{n}\left(M_{ik}\frac{dI_k}{dt}+R_{ik}I_k+S_{ik}\int I_k dt\right)=\mathcal{E}_i(t)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$, ochiului de rețea *bcdeb*, se obține

$$L\frac{dI_1}{dt}+RI=\mathcal{E}, \tag{31.1}$$

iar aplicarea aceleiași legi ochiului de rețea *acdfa* conduce la

$$RI+\frac{1}{C}\int I_2 dt=\mathcal{E}. \tag{31.2}$$

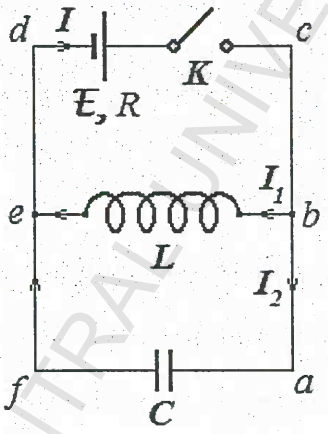


Fig. 31.1

A doua lege a lui Kirchhoff (referitoare la nodurile de rețea), $\sum_{k=1}^{n}\left(C_{ik}\dot{U}_k+\lambda_{ik}U_k+L_{ik}\int U_k dt\right)=I_i(t)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$, furnizează relația suplimentară

$$C\frac{dU}{dt}+\frac{1}{L}\int U\,dt=I(t), \tag{31.3}$$

unde U este căderea de tensiune atât pe bobină, cât și pe condensator (vezi figura 31.2). Întrucât căderea de tensiune pe un condensator este

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$U = \frac{q}{C}$, unde q este sarcina electrică de pe armăturile condensatorului, iar C este capacitatea acestuia, pentru condensatorul din figura 31.2 se poate scrie

$$U = \frac{q_2}{C} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dq_2}{dt} = \frac{1}{C} I_2(t) \Rightarrow I_2(t) = C\frac{dU}{dt}, \qquad (31.4)$$

unde q_2 este sarcina electrică pe armăturile condensatorului, iar $I_2 = \frac{dq_2}{dt}$. Apoi, căderea de tensiune U pe bobina de inductanță L este $U = L\, dI_1/dt$, unde, așa cum se observă din figura 31.2, I_1 este curentul care trece prin bobină. De aici rezultă că

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{U}{L} \Rightarrow I_1(t) = \frac{1}{L}\int U\, dt. \qquad (31.5)$$

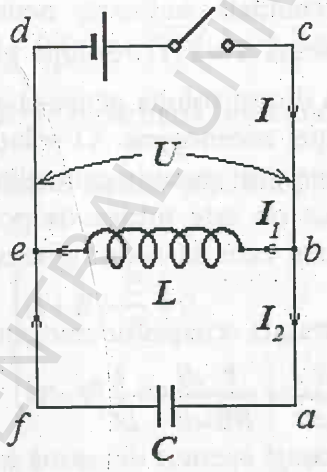


Fig. 31.2

Cu (31.4) și (31.5) în (31.3) rezultă că

$$I_2(t) + I_1(t) = I(t), \qquad (31.6)$$

adică legea nodurilor de rețea aplicată pentru nodul de rețea b din circuitul din figura 31.2, în forma binecunoscut (clasică). Relațiile (31.1), (31.2) și (31.6) conduc la soluția problemei. Astfel, derivând relația (31.2)

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de două ori în raport cu timpul, avem: $R\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{C}\frac{dI_2}{dt}=0$, de unde $\frac{dI_2}{dt}=-RC\frac{d^2I}{dt^2}$. Apoi, din relația (31.1) rezultă că $\frac{dI_1}{dt}=-\frac{R}{L}I+\frac{1}{L}\mathcal{E}$. Atunci cerința problemei, adică dependența $I=I(t)$, rezultă ca soluție a ecuației diferențiale care se obține prin adunarea rezultatelor găsite mai sus ($\frac{dI_2}{dt}$ şi $\frac{dI_1}{dt}$) şi utilizarea relației (31.6) derivată o dată în raport cu timpul

$$\frac{dI_2}{dt}+\frac{dI_1}{dt}\left(=\frac{dI}{dt}\right)=-RC\frac{d^2I}{dt^2}-\frac{R}{L}I+\frac{1}{L}\mathcal{E},$$

sau

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{LC}I=\frac{1}{RLC}\mathcal{E}, \qquad (31.7)$$

care este o ecuație diferențială ordinară, neomogenă, cu coeficienți constanți pentru necunoscuta $I=I(t)$. Soluția generală a unei astfel de ecuații se obține ca suma dintre soluția generală a ecuației omogene şi o soluție particulară a ecuației neomogene. O soluție particulară a ecuației neomogene se poate obține prin metoda generală a variației constantelor, sau, mai simplu – ceea ce nu este totdeauna posibil – căutând această soluție de forma termenului care dă neomogenitatea (în cazul de față, o constantă).

Ecuația omogenă ataşată ecuației neomogene (31.7) este

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{LC}I=0,$$

iar ecuația caracteristică ataşată acesteia din urmă este

$$r^2+\frac{1}{RC}r+\frac{1}{LC}=0$$

şi are rădăcinile

$$(r)_{1,2}=\frac{-\frac{1}{RC}\pm\sqrt{\frac{1}{R^2C^2}-\frac{4}{LC}}}{2}=-\frac{1}{2RC}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4R^2C}{L}}\right)=$$

BCUIASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\frac{1}{4R^2C^2}-\frac{1}{LC}}\,. \tag{31.8}$$

Soluția generală a ecuației omogene este atunci

$$I_o(t)=A\,e^{r_1 t}+B\,e^{r_2 t}=A\,e^{-\frac{t}{2RC}}\,e^{+t\sqrt{\frac{1}{4R^2C^2}-\frac{1}{LC}}}+B\,e^{-\frac{t}{2RC}}\,e^{-t\sqrt{\frac{1}{4R^2C^2}-\frac{1}{LC}}}=$$

$$A\,e^{-\frac{t}{2RC}}\,e^{i\omega t}+B\,e^{-\frac{t}{2RC}}\,e^{-i\omega t}, \tag{31.9}$$

unde $\omega^2\equiv\frac{1}{LC}-\frac{1}{4R^2C^2}$, iar A şi B sunt două constante arbitrare de integrare. Căutând acum o soluție particulară pentru ecuația neomogenă (31.7) de forma $I_p(t)=K_0=const.$ şi impunând ca această soluție să verifice ecuația, rezultă că $I_p(t)=K_0=\frac{\mathcal{E}}{R}$. Aşadar, soluția generală a ecuației neomogene se scrie astfel

$$I(t)=I_o(t)+I_p(t)=e^{-\frac{t}{2RC}}\left(A\,e^{i\omega t}+B\,e^{-i\omega t}\right)+\frac{\mathcal{E}}{R}, \tag{31.10}$$

unde constantele A şi B se determină din condițiile inițiale: $I(0)=0$ şi $\frac{dI}{dt}(0)=0$. Rezultă următorul sistem algebric pentru necunoscutele A şi B:

$$\begin{cases} A+B+\dfrac{\mathcal{E}}{R}=0, \\ (A-B)\left(i\omega-\dfrac{1}{2RC}\right)=0, \end{cases}$$

care, în ipoteza că $\left(i\omega-\frac{1}{2RC}\right)\neq 0$, are soluțiile $A=B=-\frac{\mathcal{E}}{2R}$. Cu A şi B astfel determinate în relația (31.10) se obține forma finală a soluției problemei

$$I(t)=\frac{\mathcal{E}}{R}-\frac{\mathcal{E}}{2R}e^{-\frac{t}{2RC}}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)=\frac{\mathcal{E}}{R}-\frac{\mathcal{E}}{2R}e^{-\frac{t}{2RC}}2\cos\omega t=$$

$$\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{2RC}}\cos\omega t\right), \tag{31.11}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

care este reprezentată grafic în figurile de mai jos, cu ajutorul următoarelor linii de comandă din Mathematica 5.0:

****

Needs["Graphics'Colors'"]

$R = 200;$

$ES = 10;$

$L = 4*\pi*10\text{^}-4;$

$CA = 10\text{^}-6;$

$\omega = \sqrt{\frac{1}{L*CA} - \frac{1}{4*R\text{^}2*CA\text{^}2}};$

$CE[t_] = \frac{ES}{R}*\left(1 - e^{\frac{t}{2*R*CA}}*\text{Cos}[\omega*t]\right);$

$t_i = 0;$

$t_f = 1.75*10\text{^}-3;$

$gr1 = \text{Plot}[CE[t], \{t, t_i, t_f\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Red},$

$\text{AxesLabel} \rightarrow \{"t(s)", "I(A)"\}]$

$\text{Print}["I = I(t) \text{ pentru } ", t_i, "\leq t \leq ", t_f];$

$gr2 = \text{Plot}[\frac{ES}{R}*\left(1 - e^{\frac{t}{2*R*CA}}\right), \{t, t_i, t_f\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Black},$

$\text{AxesLabel} \rightarrow \{"t(s)", "I_{cr-}(A)"\}]$

$\text{Print}["I_{cr+} = I_{cr+}(t) \text{ pentru } ", t_i, "\leq t \leq ", t_f];$

$gr3 = \text{Plot}[\frac{ES}{R}*\left(1 + e^{\frac{t}{2*R*CA}}\right), \{t, t_i, t_f\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Black},$

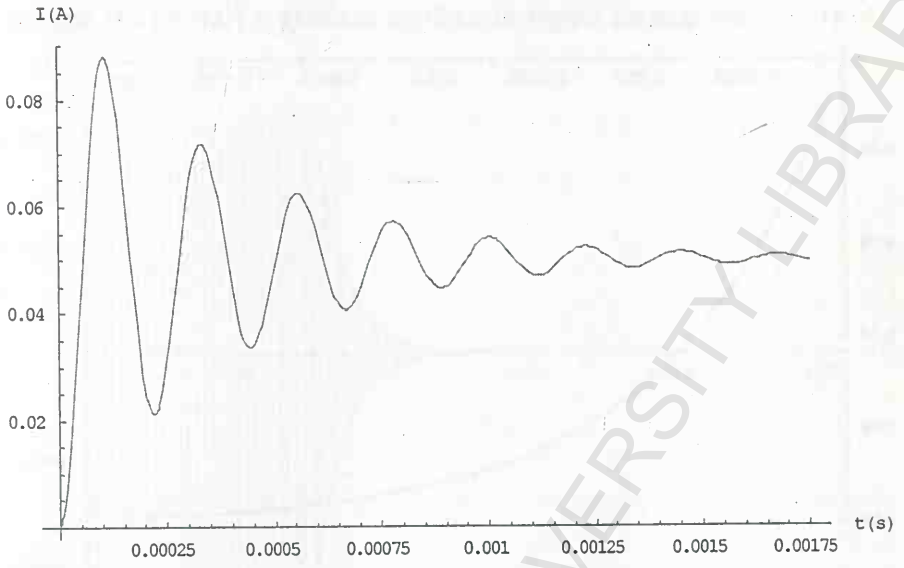
$\text{AxesLabel} \rightarrow \{"t(s)", "I_{cr-}(A)"\}]$

$\text{Print}["I_{cr-} = I_{cr-}(t) \text{ pentru } ", t_i, "\leq t \leq ", t_f];$

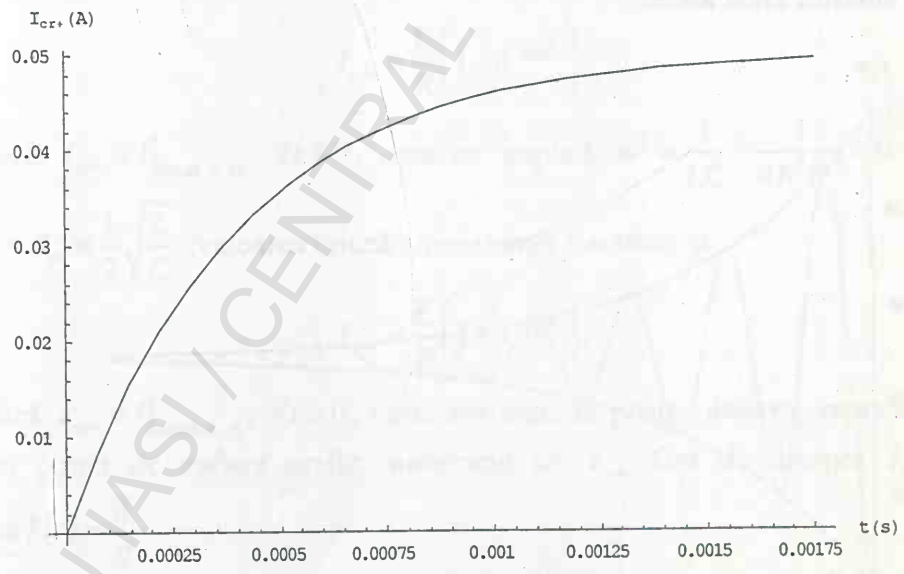
$\text{Show}[gr1, gr2, gr3];$

****

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

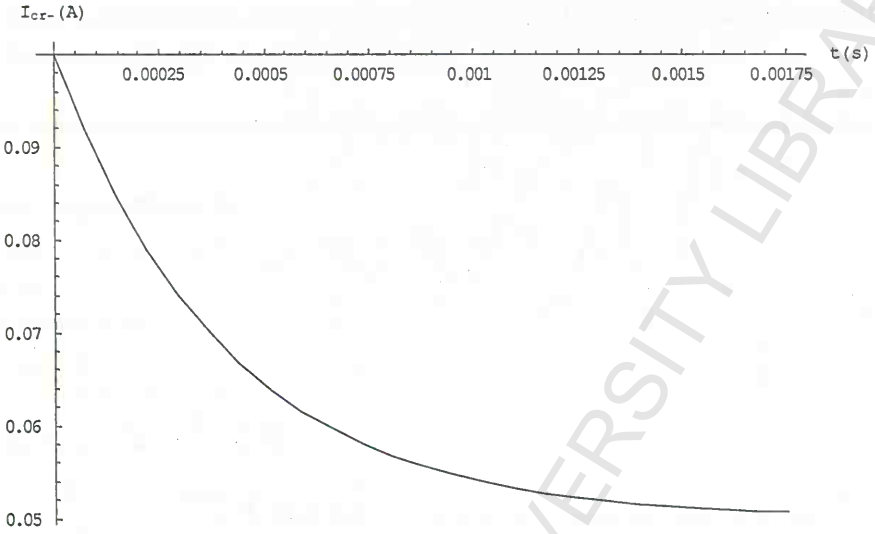


$I = I(t)$ pentru $0 \le t \le 0.00175$



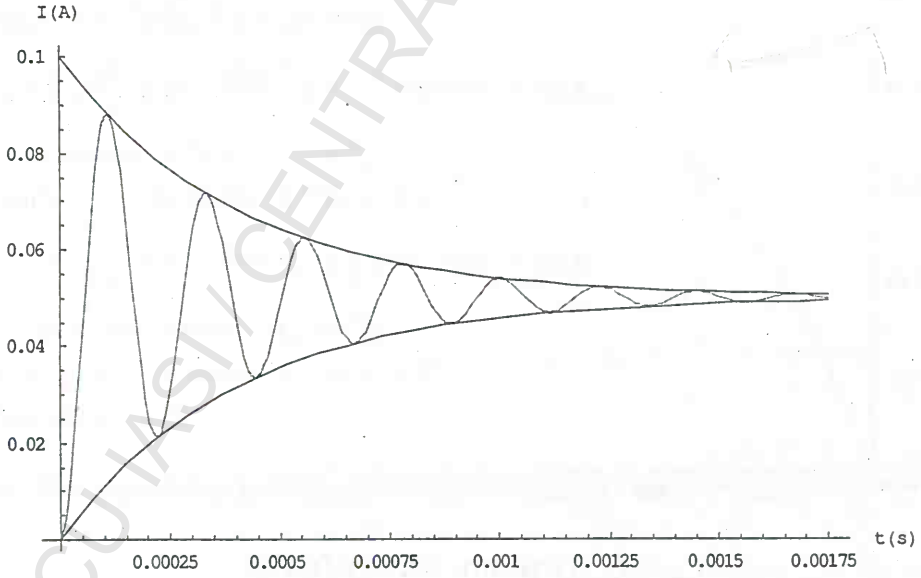
$I_{cr+} = I_{cr+}(t)$ pentru $0 \le t \le 0.00175$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



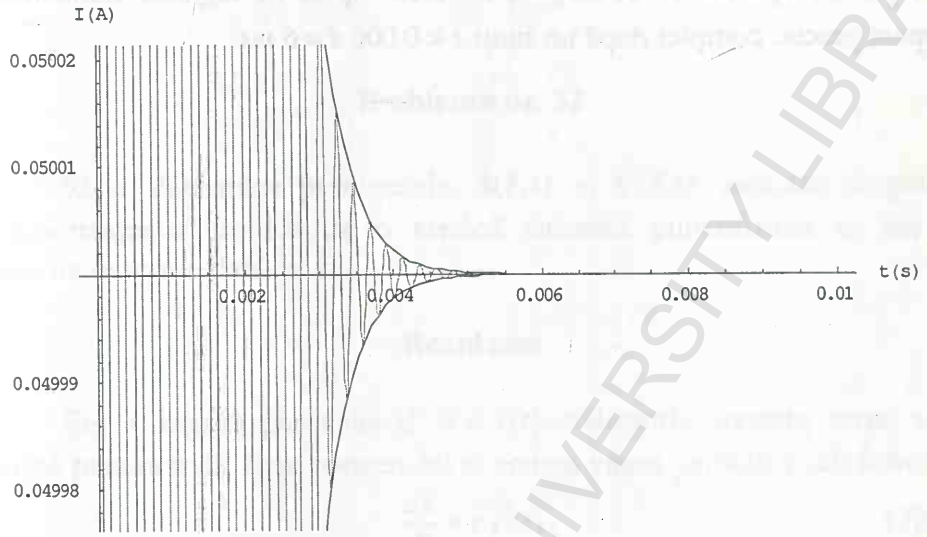
$$I_{cr-} = I_{cr-}(t) \text{ pentru } 0 \le t \le 0.00175$$

Pe un singur grafic, pentru $0 \le t \le 0.00175$ s, cele trei curbe prezentate anterior arată astfel:



BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar pentru $0 \le t \le 0.01$ s, graficul arată ca în figura de mai jos.



Mai sus au fost utilizate următoarele notații:

$$I_{cr+} = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{2RC}}\right),$$

adică $I_{cr+} = I\big|_{\cos\omega t = +1}$, $\forall t > 0$, ceea ce implică $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2} = 0 \Leftrightarrow$ $R = R_{cr} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ (valoarea critică a rezistenței electrice) și

$$I_{cr-} = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 + e^{-\frac{t}{2RC}}\right),$$

adică $I_{cr-} = I\big|_{\cos\omega t = -1}$, $\forall t > 0$, care, așa cum se poate observa, reprezintă din punct de vedere grafic, simetricul lui I_{cr+} față de dreapta $I_\infty = \lim_{t\to\infty} I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

Pentru valorile considerate ale tensiunii electromotoare, $\mathcal{E} = 10\ V$, rezistenței ei interne, $R = 200\ \Omega$, inductanței bobinei, $L = 4\pi \cdot 10^{-4} H$ și

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

capacității condensatorului, $C = 10^{-6} F = 1\ \mu F$, din ultima figură (reprezentată pentru $t_f = 10^{-2} s = 10\ ms$) se observă faptul că regimul tranzitoriu dispare practic complet după un timp $t < 0.006\ s = 6\ ms$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

V. Potențialele Wiechert-Lienard. Unde electromagnetice

Problema nr. 32

Să se determine potențialele $\vec{A}(\vec{r},t)$ și $V(\vec{r},t)$ asociate câmpului electromagnetic produs de o sarcină electrică punctiformă ce are o mișcare oarecare dată, în vid.

Rezolvare

Fie e sarcina particulei și $\vec{x} = \vec{x}(t)$ traiectoria acesteia, scrisă sub formă parametrică. Este convenabil să scriem viteza particulei sub forma

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = c\,\vec{\beta}(t), \tag{32.1}$$

iar densitățile de sarcină electrică, $\rho(\vec{r},t)$, și de curent electric, $\vec{j}(\vec{r},t)$, le vom exprima cu ajutorul distribuției *delta* a lui Dirac

$$\rho(\vec{r},t) = e\,\delta[\vec{r} - \vec{x}(t)], \tag{32.2}$$

$$\vec{j}(\vec{r},t) = ec\,\vec{\beta}(t)\,\delta[\vec{r} - \vec{x}(t)]. \tag{32.3}$$

Pentru a răspunde la cerințele problemei, vom utiliza cunoscutele expresii ale *potențialelor retardate*

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_V \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-r'|}\,d\vec{r}', \tag{32.4}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-r'|}\,d\vec{r}'. \tag{32.5}$$

Să calculăm, de pildă, potențialul scalar V. Potrivit lui (32.2) și (32.4), avem

$$V(\vec{r},t) = \frac{e}{4\pi\,\varepsilon_o}\int_V \frac{\delta\left[\vec{r}' - \vec{x}\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\right]}{|\vec{r}-r'|}\,d\vec{r}'. \tag{32.6}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Observând că distribuţia *delta* ce intervine în integrală se poate scrie

$$\delta\left[\vec{r}\,'-\vec{x}\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)\right]=\int\delta[\vec{r}\,'-\vec{x}(t')]\,\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)dt',$$

mai avem

$$V(\vec{r},t)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_o}\int dt'\int\frac{\delta[\vec{r}\,'-\vec{x}(t')]\left(t'-t+\dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d\vec{r}\,'= \tag{32.7}$$

$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_o}\int dt'\frac{1}{|\vec{r}\,'-\vec{x}(t')|}\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right).$$

Pe de altă parte, din teoria distribuţiei *delta* se ştie că (vezi Anexa E)

$$\int g(t')\,\delta[f(t')-t]\,dt'=\left[\frac{g(t')}{\dfrac{df}{dt'}}\right]_{f(t')=t}. \tag{32.8}$$

Cum în cazul nostru

$$g(t')=\frac{1}{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}\;;\quad f(t')=t'+\frac{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}{c},$$

iar

$$\frac{df}{dt'}=1+\frac{1}{c}\frac{d}{dt'}\{[r_i-x_i(t')][r_i-x_i(t')]\}^{1/2}=$$

$$1+\frac{1}{c}\frac{r_i-x_i(t')}{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}\left(-\frac{dx_i}{dt'}\right)=1-\frac{(r_i-x_i)\beta_i}{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}=1-\vec{n}\cdot\vec{\beta},$$

unde $\vec{n}$ este versorul direcţiei $\vec{r}-\vec{x}(t')$, avem în definitiv

$$V(\vec{r},t)=\left[\frac{e}{4\pi\varepsilon_o|\vec{r}-\vec{x}|\left(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}\right)}\right]_{t=t'+\frac{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}{c}}, \tag{32.9}$$

în care $\vec{n}$, $\vec{\beta}$ şi $\vec{x}$ sunt funcţii de t'.

În mod similar se determină potenţialul vector

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\left[\frac{\mu_o e c\vec{\beta}}{4\pi|\vec{r}-\vec{x}|\left(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta}\right)}\right]_{t=t'+\frac{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}{c}}. \tag{32.10}$$

Potenţialele determinate prin relaţiile (32.9) şi (32.10) se numesc *potenţiale Wiechert- Lienard*.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pe baza considerațiilor de mai sus, ne dăm seama că este incorect să exprimăm, de pildă, potențialul scalar al câmpului produs de un număr de electroni în mișcare (în vid) prin formula

$$V(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\int_V\frac{\rho(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-r'|}\,d\vec{r}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R},$$

deoarece densitatea de sarcină microscopică ρ depinde de t' care, la rândul său, depinde de $|\vec{r}-\vec{r}'|$. Expresia corectă este, aşadar, (32.9).

Problema nr. 33

Să se interpreteze *condiția de etalonare Lorentz* în lumina rezultatelor de la problema precedentă.

Rezolvare

Din necesitatea ca relația cunoscută sub numele de *condiția Lorentz*

$$\nabla\cdot\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}=0 \qquad (33.1)$$

să fie satisfăcută în punctul de observare (coordonatele spațio-temporale ale punctului de observare sunt notate simplu cu x, y, z, t, cele ale punctului în care se află sursele cu x', y', z', $t'\left(=t-\frac{R}{u}\right)$, iar $R\left(=|\vec{r}-\vec{r}'|\right)$ este distanța dintre cele două puncte), avem pe de o parte

$$\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{1}{R}\frac{\partial\rho\left(\vec{r}',\,t-\frac{R}{u}\right)}{\partial\left(t-\frac{R}{u}\right)}\,d\vec{r}'.$$

Pe de altă parte, observăm că

$$\nabla\cdot\vec{j}\left(\vec{r}',t-\frac{R}{u}\right)=\frac{\partial\vec{j}}{\partial\left(t-\frac{R}{u}\right)}\cdot\nabla\left(t-\frac{R}{u}\right)=$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-\frac{1}{u}\frac{\partial \vec{j}}{\partial\left(t-\frac{R}{u}\right)}\cdot\nabla R=\frac{1}{u}\frac{\partial \vec{j}}{\partial\left(t-\frac{R}{u}\right)}\cdot\nabla' R\,,$$

$$\nabla'\cdot\vec{j}=\left(\nabla\cdot\vec{j}\right)_{t-\frac{R}{u}=const.}-\frac{1}{u}\frac{\partial \vec{j}}{\partial\left(t-\frac{R}{u}\right)}\cdot\nabla' R\,,$$

de unde

$$\nabla\cdot\vec{j}=\left(\nabla'\cdot\vec{j}\right)_{t-\frac{R}{u}=const.}-\nabla'\cdot\vec{j}\,.$$

Mai sus ∇ este operatorul *nabla* ce conține derivatele în raport cu coordonatele punctului de observare, iar ∇' este același operator, însă conține derivatele în raport cu coordonatele punctului în care se află sursele.

În acest caz

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\nabla\cdot\left(\frac{\vec{j}}{R}\right)d\vec{r}\,',$$

sau, după unele reduceri și aplicarea teoremei Green-Gauss-Ostrogradski,

$$\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{1}{R}\left(\nabla'\cdot\vec{j}\right)_{t-\frac{R}{u}=const.}d\vec{r}\,'.$$

Înlocuind aceste rezultate în condiția Lorentz (33.1), avem

$$\nabla\cdot\vec{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\rho}{\partial\left(t-\frac{R}{u}\right)}+\left(\nabla'\cdot\vec{j}\right)_{t-\frac{R}{u}=const.}\right]d\vec{r}\,'=0\,,$$

de unde rezultă

$$\frac{\partial\rho}{\partial\left(t-\frac{R}{u}\right)}+\left(\nabla'\cdot\vec{j}\right)_{t-\frac{R}{u}=const.}=0\,, \qquad (33.2)$$

care nu este altceva decât *ecuația de continuitate.*

Conchidem, așadar, că relația cunoscută sub numele de *condiția Lorentz*, impusă ca o condiție suplimentară pentru determinarea unică a

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

potențialelor V și $\vec{A}$, are o semnificație mai profundă decât apare la prima vedere, ea fiind echivalentă cu legea conservării sarcinii electrice. Acest lucru apare și mai evident în cadrul tratării relativist-covariante a electrodinamicii.

Problema nr. 34

Utilizând potențialul lui Hertz, $\vec{Z}$, să se determine câmpul electromagnetic generat de un dipol electric oscilant, situat în originea coordonatelor și orientat după axa Oz.

Complemente. Condiția Lorentz, scrisă pentru vid ($\vec{j} = 0$, $\rho = 0$),

$$div\,\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{34.1}$$

este satisfăcută dacă alegem

$$\vec{A} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t};\; V = -div\,\vec{Z}, \tag{34.2}$$

unde vectorul $\vec{Z}$ poartă numele de *potențialul lui Hertz*. Câmpul electromagnetic se exprimă atunci prin relațiile

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{Z}\right) - \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2}; \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \varepsilon_0\mu_0 \nabla \times \left(\dfrac{\partial \vec{Z}}{\partial t}\right). \end{cases} \tag{34.3}$$

Ca și potențialele $\vec{A}$ și V, potențialul Hertz este supus unei transformări de etalon de forma

$$\vec{Z}' = \vec{Z} + \nabla \times \vec{F}, \tag{34.4}$$

unde $\vec{F}$ este o funcție vectorială care, potrivit relațiilor ce definesc potențialele $\vec{A}$ și V, nu depinde explicit de timp. Dacă exprimăm inducția electrică cu ajutorul vectorului de polarizare electrică

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

și în ecuația cu surse a lui Maxwell

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

introducem (34.3), găsim

$$\Delta \vec{Z} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{Z}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \vec{P}. \tag{34.5}$$

Aceasta este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea, de tip hiperbolic, neomogenă, perfect asemănătoare ecuațiilor satisfăcute de potențialele $\vec{A}$ și V, câmpul vectorial $\vec{Z}$ având ca sursă intensitatea de polarizare $\vec{P}$. Soluția ecuației (34.5) este, precum știm, potențialul retardat

$$\vec{Z}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\vec{P}\left(\vec{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} d\vec{r}'; \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|. \tag{34.6}$$

Se cunoaște (vezi cursul) că, dacă alegem $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{i(kr-\omega t)}$, obținem $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}}{r}$ și atunci, neglijând termenii în $r^{-n}\,(n \geq 2)$, putem scrie

$$\vec{Z} \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}}{r}. \tag{34.7}$$

Rezolvare

Potrivit condițiilor problemei, $|\vec{p}| = p_z = p$, și atunci

$$Z_z \equiv Z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p_0 e^{i(kr-\omega t)}}{r}; \quad A_z \equiv A = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{p}{r}, \tag{34.8}$$

ceea ce conduce la

$$A = \frac{-ik}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{p}{r}. \tag{34.9}$$

De asemenea,

$$V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \vec{p}_0 \cdot \nabla \left(\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \right),$$

sau, dacă neglijăm și aici termenii ce conțin $r^{-n}\,(n \geq 2)$,

$$V = \frac{p \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r} \left(\frac{1}{r} - ik \right). \tag{34.10}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cum problema prezintă simetrie sferică, mai trebuie să cunoaştem componentele vectorului $\vec{A}$:

$$A_r = A\cos\theta,\ A_\theta = -A\sin\theta,\ A_\varphi = 0. \tag{34.11}$$

Acum putem calcula câmpul într-un punct oarecare, M, suficient de îndepărtat pentru a putea utiliza aproximaţia $\mathcal{O}(r^{-n},\ n \geq 2) \approx 0$. Luând doar partea reală a expresiilor obţinute, avem atunci

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial t} = -\dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o}\left(\dfrac{ik}{r^2} - \dfrac{2}{r^3}\right) - \dfrac{ik\,p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r}\left(\dfrac{1}{r} - ik\right) \cong 0; \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial t} = \dfrac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2}\left(\dfrac{1}{r} - ik\right) - \dfrac{\omega k\,p\sin\theta}{4\pi r}\sqrt{\dfrac{\mu_o}{\varepsilon_o}} \cong \\ \qquad\qquad \dfrac{-\omega^2\sin\theta}{4\pi\varepsilon_o c^2 r}\,p_o\cos(kr-\omega t); \\ E_\varphi = -\dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = 0. \end{cases} \tag{34.12}$$

În acelaşi mod se calculează componentele câmpului $\vec{B}$:

$$\begin{cases} B_r = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi) - \dfrac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\theta)\right] = 0; \\ B_\theta = \dfrac{1}{r\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial\varphi}(A_r) - \dfrac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi)\right] = 0; \\ B_\varphi = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \dfrac{\partial}{\partial\theta}(A_r)\right] \cong -\dfrac{\omega^2\mu_o\sin\theta}{4\pi rc}\,p_o\cos(kr-\omega t). \end{cases} \tag{34.13}$$

După cum era de aşteptat, avem

$$|E_\theta| = c|B_\varphi|. \tag{34.14}$$

Observaţie: Utilizând (34.2) şi (34.8), găsim imediat

$$\begin{cases} \vec{E} = -k^2 Z\cos\theta\,\vec{s} + k^2 Z\,\vec{u}_z; \\ \vec{B} = -\dfrac{k^2}{c} Z\sin\theta\,\vec{u}_\varphi, \end{cases}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $\vec{s}$ este versorul direcției de propagare a undei. Relațiile ce rezultă prin exprimarea lui Z în funcție de p, proiectate pe direcțiile coordonatelor sferice, conduc la (34.12) și (34.13).

Problema nr. 35

Să se determine distribuția unghiulară a mediei temporale a puterii radiate pe unitatea de unghi solid a unei antene subțiri, liniare, cu lungimea d, care este excitată la mijlocul ei, presupunând o distribuție sinusoidală a curentului de-a lungul antenei.

Rezolvare

Presupunem antena orientată după axa Oz, ca în Figura 35.1. Dacă $\tilde{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*$ este vectorul Poynting complex, atunci densitatea fluxului mediu al energiei electromagnetice emise în unitatea de timp (sau, altfel spus, media în timp a puterii radiate pe unitatea de suprafață) este partea reală a componentei normale a vectorului $\tilde{\vec{\Pi}}$:

$$\langle \varphi_{em} \rangle \equiv \frac{dP}{dS} = \mathrm{Re}\,\tilde{\Pi}_n = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\vec{n}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\right], \qquad (35.1)$$

unde prin $\langle\bullet\rangle$ se înțelege media pe o perioadă, iar $\vec{n}$ este vectorul unitate pe direcția lui $\vec{r}$ (direcție care este perpendiculară pe suprafața S și care determină prin intermediul lui r unghiul solid Ω).

Acest lucru rezultă imediat dacă se ține cont de relația

$$\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle \equiv \left\langle \vec{E}\times\vec{H} \right\rangle = \left\langle \tilde{\vec{\Pi}} \right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right), \qquad (35.2)$$

unde $\vec{\Pi} = \vec{E}\times\vec{H} = EH\,\vec{s}$ este vectorul Poynting, care are semnificația fluxului radiant în unitatea de timp prin unitatea de suprafață normală pe vectorul $\vec{\Pi}$, a cărui direcție (și sens) este dată de versorul $\vec{s}$ (versorul direcției de propagare a undei electromagnetice în zona îndepărtată).

Atunci, media în timp a puterii radiate de antenă în unitatea de unghi solid va fi

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

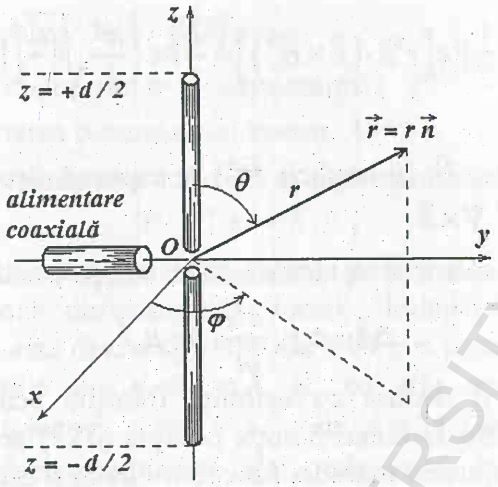


Fig. 35.1

$$\frac{dP}{d\Omega} = \mathrm{Re}\left(r^2 \tilde{\Pi}_n\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[r^2 \vec{n}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\right]. \qquad (35.3)$$

Deci, pentru calcularea lui $dP/d\Omega$ trebuiesc determinate mai întâi câmpurile $\vec{E}$ şi $\vec{H}$. Presupunând antena în vid (sau chiar în aer dacă ținem cont că pentru acesta $\mu_r \cong 1$), componenta magnetică a câmpului poate fi determinată din relația $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 = \mu_0^{-1}\,\nabla\times\vec{A}$, iar $\vec{E}$ se poate afla din ecuația Maxwell (considerând că în zona în care se determină câmpul nu există curenți de conducție)

$$\nabla\times\vec{B}\left(=\mu_0\,\nabla\times\vec{H}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \qquad (35.4)$$

Dacă în exteriorul sursei considerăm pentru componenta electrică $\vec{E}$ a câmpului o variație temporală periodică de forma $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\times e^{-i\omega t}$, atunci din (35.4) rezultă că

$$\vec{E} = \frac{ic^2}{\omega}\nabla\times\vec{B} = \frac{ic^2\mu_0}{\omega}\nabla\times\vec{H} = \frac{i}{\omega\varepsilon_0}\nabla\times\vec{H} = \frac{i}{k}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\nabla\times\vec{H}\,. \qquad (35.5)$$

În concluzie, pentru a determina $dP/d\Omega$ este suficient să se afle potențialul vector $\vec{A}$, deoarece

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{dP}{d\Omega}=\mathrm{Re}\left(r^2\vec{\Pi}_n\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[r^2\vec{n}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{ir^2}{k}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\left(\nabla\times\vec{H}\right)\times\vec{H}^*\right]\cdot\vec{n}\right\}, \tag{35.6}$$

iar câmpul magnetic $\vec{H}$ (şi implicit $\vec{H}^*$) se exprimă direct prin potenţialul vector $\vec{A}$: $\vec{H}=\mu_0^{-1}\,\nabla\times\vec{A}$.

Potenţialul vector $\vec{A}$ se determină ca soluţie a ecuaţiei

$$\Delta\vec{A}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\vec{J}, \tag{35.7}$$

ecuaţie ce poate fi dedusă cu uşurinţă folosind ecuaţiile Maxwell şi condiţia de etalonare Lorentz. Soluţia ecuaţiei (35.7) se poate determina cel mai simplu cu ajutorul metodei funcţiilor Green şi este

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\int dt'\frac{J(\vec{r}\,',t')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,\delta\left(t'+\frac{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}{c}-t\right), \tag{35.8}$$

dacă nu sunt prezente suprafeţe frontieră. Funcţia delta a lui Dirac asigură comportarea cauzală a câmpurilor (cauza – curentul $\vec{J}(\vec{r}\,',t')$ – trebuie să preceadă efectul – „câmpul” $\vec{A}(\vec{r},t)$). Cum pentru un sistem de sarcini electrice şi curenţi variabili în timp se poate face o analiză Fourier a dependenţei de timp şi astfel fiecare componentă se poate „manipula” separat, nu se pierde nimic din generalitate dacă se consideră potenţialele, câmpurile şi radiaţia unui sistem localizat de sarcini şi curenţi (aşa cum este şi cazul problemei de faţă) ca variind sinusoidal în timp

$$\vec{J}(\vec{r},t)=\vec{J}(\vec{r})e^{-i\omega t}. \tag{35.9}$$

Utilizând această dependenţă temporală a lui $\vec{J}$ în (35.8), soluţia pentru $\vec{A}(\vec{r},t)$ devine

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}e^{-i\omega t}\int\limits_{(D)}\vec{J}(\vec{r}\,')\frac{e^{ik\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}d^3r', \tag{35.10}$$

unde s-a folosit proprietatea de filtraj a funcţiei delta a lui Dirac (vezi relaţia (E.6) din Anexa E), iar (D) reprezintă domeniul spaţial în care sunt distribuite sursele (în cazul problemei de faţă domeniul (D) este reprezen-

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

tat de intervalul închis $[-d/2,\ d/2]$).

În zona undelor ($kr \gg 1$) exponențiala $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}$ oscilează rapid și determină comportarea potențialului vector $\vec{A}(\vec{r},t)$.

În această regiune este suficient să se aproximeze

$$|\vec{r}-\vec{r}'| \cong \vec{r}-\vec{n}\cdot\vec{r}', \tag{35.11}$$

relație care își păstrează valabilitatea chiar și pentru $r \gg d$ (unde d este o distanță de ordinul dimensiunilor sursei), independent de valoarea produsului kr. Ea este deci o aproximație adecvată chiar și în zona vecină (statică) caracterizată de $d \ll r \ll \lambda$ și, cu atât mai mult, în zona intermediară (de inducție), $d \ll r \sim \lambda$, unde $\lambda = 2\pi c/\omega$ este lungimea de undă a radiației electromagnetice. Mai mult chiar, dacă se cere numai termenul principal, inversul distanței din relația (35.10) poate fi înlocuit simplu prin r și atunci potențialul vector devine

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\int_{(D)} \vec{J}(\vec{r}')\, e^{-ik(\vec{n}\cdot\vec{r}')} d^3r'. \tag{35.12}$$

Aceasta demonstrează că în zona îndepărtată (zona undelor) potențialul vector se comportă ca o undă sferică emergentă, cu un coeficient ce depinde de unghi. De altfel, este ușor de arătat că din relațiile $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0 = \mu_0^{-1}\,\nabla\times\vec{A}$ și $\vec{E} = \frac{i}{k}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\,\nabla\times\vec{H}$ rezultă câmpuri care sunt perpendiculare pe raza vectoare $\vec{r}$ și descresc ca r^{-1} (câmpuri radiative).

Dacă amortizarea datorată emisiei de radiație este neglijată și antena este destul de subțire, atunci se poate considera cu o precizie suficient de bună că de-a lungul antenei curentul este sinusoidal în timp și spațiu, cu numărul de undă $k = \omega/c$. În plus, curentul este simetric pe cele două brațe ale antenei și se anulează la capetele acesteia. Matematic aceste caracteristici sunt modelate de expresia

$$\vec{J}(\vec{r}) = I\sin\left(\frac{kd}{2} - k|z|\right)\delta(x)\delta(y)\vec{u}_3, \tag{35.13}$$

unde $\vec{u}_3 \equiv \hat{z}$ este versorul axei Oz. Funcțiile delta asigură faptul că „scurgerea" curentului are loc numai de-a lungul axei Oz. Dacă $kd \geq \pi$, atunci

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

I este valoarea maximă a curentului, iar in originea axelor de coordonate (în punctul central de excitație al antenei) curentul are valoarea constantă $I\sin(kd/2)$.

Utilizând (35.13) în (35.12) rezultă că în zona radiativă (unde este valabilă relația (35.12)) potențialul vector $\vec{A}(\vec{r},t)$ este orientat în direcția axei Oz şi are forma

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\int\limits_{(D)}\vec{J}(\vec{r}')\,e^{-ik(\vec{n}\cdot\vec{r}')}d^3r'=\vec{u}_3\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}\int\limits_{(D)}\Big[\sin\Big(\frac{kd}{2}-k|z'|\Big)\times$$

$$e^{-ik(\vec{n}\cdot\vec{r}')}\delta(x')\delta(y')\Big]dx'dy'dz'=\vec{u}_3\frac{\mu_0 I e^{ikr}e^{-i\omega t}}{4\pi r}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x')dx'\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(y')dy'\times$$

$$\int\limits_{-d/2}^{+d/2}\sin\Big(\frac{kd}{2}-k|z'|\Big)e^{-ikz'\cos\theta}dz'=\vec{u}_3\frac{\mu_0 I e^{ikr}e^{-i\omega t}}{4\pi r}\int\limits_{-d/2}^{+d/2}\sin\Big(\frac{kd}{2}-k|z'|\Big)e^{-ikz'\cos\theta}dz' \tag{35.14}$$

unde, fără a afecta rezultatul, s-a extins domeniul de integrare după x' şi y' de la $-\infty$ la $+\infty$ şi s-a folosit proprietatea (E.4) (vezi Anexa E).

Aşadar, problema revine pentru moment la a calcula integrala

$$J=\int\limits_{-d/2}^{+d/2}\sin\Big(\frac{kd}{2}-k|x|\Big)e^{-ikx\cos\theta}dx\,. \tag{35.15}$$

Pentru aceasta, urmând procedura uzuală, se consideră integrala ajutătoare

$$K=\int\limits_{-d/2}^{+d/2}\cos\Big(\frac{kd}{2}-k|x|\Big)e^{-ikx\cos\theta}dx \tag{35.16}$$

şi se formează combinațiile $C_1=K-iJ$ şi $C_2=K+iJ$, care pot fi calculate mai uşor, integrala căutată fiind dată de $J=(C_2-C_1)/2i$. Astfel, utilizând formula lui Moivre se găseşte că

$$C_1=K-iJ=\int\limits_{-d/2}^{+d/2}e^{-i\left(\frac{kd}{2}-k|x|\right)}e^{-ikx\cos\theta}\,dx=e^{-i\frac{kd}{2}}\int\limits_{-d/2}^{+d/2}e^{-ik(x\cos\theta-|x|)}\,dx=$$

$$e^{-i\frac{kd}{2}}\left[\int\limits_{-d/2}^{0}e^{-ik(x\cos\theta+x)}\,dx+\int\limits_{0}^{+d/2}e^{-ik(x\cos\theta-x)}\,dx\right]=e^{-i\frac{kd}{2}}\left[\int\limits_{-d/2}^{0}e^{-ikx(1+\cos\theta)}\,dx+\right.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int_0^{+d/2} e^{ikx(1-\cos\theta)}dx\Bigg] = e^{-i\frac{kd}{2}}\left\{\left[\frac{e^{-ikx(1+\cos\theta)}}{-ik(1+\cos\theta)}\right]_{-d/2}^{0} + \left[\frac{e^{ikx(1-\cos\theta)}}{ik(1-\cos\theta)}\right]_{0}^{+d/2}\right\} =$$

$$\frac{i}{k}e^{-i\frac{kd}{2}}\left[\frac{1-e^{i\frac{kd}{2}(1+\cos\theta)}}{1+\cos\theta} + \frac{1-e^{i\frac{kd}{2}(1-\cos\theta)}}{1-\cos\theta}\right] = \frac{i}{k}\frac{e^{-i\frac{kd}{2}}}{\sin^2\theta}\Big[2-2e^{i\frac{kd}{2}}\cos\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)+$$

$$2ie^{i\frac{kd}{2}}\cos\theta\sin\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)\Big] \tag{35.17}$$

şi în mod analog

$$C_2 = K + iJ = \int_{-d/2}^{+d/2} e^{i\left(\frac{kd}{2}-k|x|\right)}e^{-ikx\cos\theta}dx = e^{i\frac{kd}{2}}\int_{-d/2}^{+d/2} e^{-ik(x\cos\theta+|x|)}dx =$$

$$e^{i\frac{kd}{2}}\left[\int_{-d/2}^{0} e^{-ik(x\cos\theta-x)}dx + \int_{0}^{+d/2} e^{-ik(x\cos\theta+x)}dx\right] = e^{i\frac{kd}{2}}\left[\int_{-d/2}^{0} e^{ikx(1-\cos\theta)}dx + \right.$$

$$\left.\int_0^{+d/2} e^{-ikx(1+\cos\theta)}dx\right] = e^{i\frac{kd}{2}}\left\{\left[\frac{e^{ikx(1-\cos\theta)}}{ik(1-\cos\theta)}\right]_{-d/2}^{0} + \left[\frac{e^{-ikx(1+\cos\theta)}}{-ik(1+\cos\theta)}\right]_{0}^{+d/2}\right\} =$$

$$\frac{-i}{k}e^{i\frac{kd}{2}}\left[\frac{1-e^{-i\frac{kd}{2}(1-\cos\theta)}}{1-\cos\theta} + \frac{1-e^{-i\frac{kd}{2}(1+\cos\theta)}}{1+\cos\theta}\right] = \frac{-i}{k}\frac{e^{i\frac{kd}{2}}}{\sin^2\theta}\Big[2-2e^{-i\frac{kd}{2}}\cos\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)-$$

$$2ie^{-i\frac{kd}{2}}\cos\theta\sin\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)\Big]. \tag{35.18}$$

Atunci

$$J = \int_{-d/2}^{+d/2}\sin\left(\tfrac{kd}{2}-k|x|\right)e^{-ikx\cos\theta}dx = \frac{C_2-C_1}{2i} =$$

$$\frac{1}{2i}\left\{\frac{-i}{k}\frac{e^{i\frac{kd}{2}}}{\sin^2\theta}\Big[2-2e^{-i\frac{kd}{2}}\cos\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)-2ie^{-i\frac{kd}{2}}\cos\theta\sin\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)\Big]-\right.$$

$$\left.\frac{i}{k}\frac{e^{-i\frac{kd}{2}}}{\sin^2\theta}\Big[2-2e^{i\frac{kd}{2}}\cos\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)+2ie^{i\frac{kd}{2}}\cos\theta\sin\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)\Big]\right\} =$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-\frac{1}{k\sin^2\theta}\left[e^{i\frac{kd}{2}}+e^{-i\frac{kd}{2}}-2\cos\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)\right]=\frac{2}{k}\frac{\cos\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\tfrac{kd}{2}}{\sin^2\theta}. \tag{35.19}$$

Cu acest rezultat în (35.14), pentru potențialul vector $\vec{A}(\vec{r},t)$ se obține expresia

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\vec{u}_3\frac{\mu_0 I e^{ikr}e^{-i\omega t}}{4\pi r}\int_{-d/2}^{+d/2}\sin\left(\tfrac{kd}{2}-k|z'|\right)e^{-ikz'\cos\theta}dz'= \tag{35.20}$$

$$\vec{u}_3\frac{\mu_0 I e^{ikr}e^{-i\omega t}}{2\pi kr}\frac{\cos\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\tfrac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\equiv A_0\frac{e^{ikr}}{r}\vec{u}_3,$$

unde $A_0\equiv\dfrac{\mu_0 I e^{-i\omega t}}{2\pi k}\dfrac{\cos\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\tfrac{kd}{2}}{\sin^2\theta}$.

Pentru a obține distribuția unghiulară a puterii radiate de antenă, $dP/d\Omega$, în acord cu relația (35.6) trebuie calculată cantitatea $\left[\left(\nabla\times\vec{H}\right)\times\vec{H}^*\right]\cdot\vec{n}$, în care $\vec{H}=\mu_0^{-1}\nabla\times\vec{A}$. Avem

$$\vec{H}=\mu_0^{-1}\nabla\times\vec{A}=\mu_0^{-1}A_0\nabla\times\left(\frac{e^{ikr}}{r}\vec{u}_3\right)=\mu_0^{-1}A_0\left[\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\times\vec{u}_3+\frac{e^{ikr}}{r}\nabla\times\vec{u}_3\right]=$$

$$\mu_0^{-1}A_0\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\times\vec{u}_3=\mu_0^{-1}A_0\left(\frac{1}{r}\nabla e^{ikr}+e^{ikr}\nabla\frac{1}{r}\right)\times\vec{u}_3=\mu_0^{-1}A_0\left(\frac{ik\,\vec{r}}{r^2}e^{ikr}-\right.$$

$$\left.e^{ikr}\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\times\vec{u}_3=\mu_0^{-1}A_0e^{ikr}\left(\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{u}_3\ , \tag{35.21}$$

relație care, în zona radiativă (zona undelor) capătă forma asimptotică

$$\vec{H}=\mu_0^{-1}A_0e^{ikr}\frac{ik\vec{r}}{r^2}\times\vec{u}_3=\mu_0^{-1}\frac{\mu_0 I e^{-i\omega t}}{2\pi k}\frac{\cos\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\tfrac{kd}{2}}{\sin^2\theta}e^{ikr}\frac{ik}{r}\vec{n}\times\vec{u}_3=$$

$$\frac{iIe^{-i(\omega t-kr)}}{2\pi r}\frac{\cos\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\tfrac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\vec{n}\times\vec{u}_3, \tag{35.22}$$

sau, mai simplu,

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{H}=\frac{ik}{\mu_0}\vec{n}\times\vec{A} \tag{35.23}$$

şi

$$\left|\vec{H}\right|=\sqrt{\vec{H}\cdot\vec{H}^*}=\frac{I}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin\theta}. \tag{35.24}$$

Pentru $\nabla\times\vec{H}$ avem

$$\nabla\times\vec{H}=\nabla\times\left[\mu_0^{-1}A_0e^{ikr}\left(\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{u}_3\right]=\frac{Ie^{-i\omega t}}{2\pi k}\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\nabla\times$$

$$\left[e^{ikr}\left(\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)\vec{n}\times\vec{u}_3\right]\equiv B_0\nabla\times\left[e^{ikr}\left(\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)\vec{n}\times\vec{u}_3\right]=B_0\nabla\times\left[\left(\frac{ike^{ikr}}{r}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{e^{ikr}}{r^2}\right)\vec{n}\times\vec{u}_3\right]=B_0\left(\frac{ike^{ikr}}{r}-\frac{e^{ikr}}{r^2}\right)\underbrace{\nabla\times\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)}_{=0}+B_0\nabla\left(\frac{ike^{ikr}}{r}-\frac{e^{ikr}}{r^2}\right)\times\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)=$$

$$ikB_0\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)\times\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)-B_0\nabla\left(\frac{e^{ikr}}{r^2}\right)\times\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)=-ikB_0e^{ikr}\left(\frac{ik}{r}-\frac{1}{r^2}\right)\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times$$

$$\vec{n}+B_0e^{ikr}\left(\frac{ik}{r^2}-\frac{2}{r^3}\right)\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times\vec{n}=k^2B_0\frac{e^{ikr}}{r}\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times\vec{n}+2B_0e^{ikr}\times$$

$$\left[\frac{ik}{r^2}-\frac{1}{r^3}\right]\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times\vec{n}=\frac{kIe^{-i(\omega t-kr)}}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times\vec{n}+$$

$$\frac{Ie^{-i(\omega t-kr)}}{\pi k}\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\left[\frac{ik}{r^2}-\frac{1}{r^3}\right]\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times\vec{n}\,. \tag{35.25}$$

Ținând cont de acest rezultat, urmează că în zona radiativă câmpul electric ia forma asimptotică

$$\vec{E}=\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\nabla\times\vec{H}=\frac{i}{k}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{kIe^{-i(\omega t-kr)}}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times\vec{n}=$$

$$\frac{iIe^{-i(\omega t-kr)}}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times\vec{n}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\vec{H}\times\vec{n}\,. \tag{35.26}$$

Atunci, în zona undelor putem scrie că

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\left[\left(\nabla\times\vec{H}\right)\times\vec{H}^*\right]\cdot\vec{n}=\left\{\left[\frac{kIe^{-i(\omega t-kr)}}{2\pi r}\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times\vec{n}\right]\times\left[\frac{iI}{2\pi r}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.e^{-i(\omega t-kr)}\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\vec{n}\times\vec{u}_3\right]^*\right\}\cdot\vec{n}=\frac{-ikI^2}{4\pi^2r^2}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\right|^2\times$$

$$\left\{\left[\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times\vec{n}\right]\times\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\right\}\cdot\vec{n}=\frac{-ikI^2}{4\pi^2r^2}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\right|^2\left\{\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times\right.$$

$$\left.\left[\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\right]\right\}\cdot\vec{n}=\frac{-ikI^2}{4\pi^2r^2}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\right|^2\left\{\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times\left[\vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{u}_3\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.\vec{u}_3\left(\vec{n}\cdot\vec{n}\right)\right]\right\}\cdot\vec{n}=\frac{-ikI^2}{4\pi^2r^2}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\right|^2\left[\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\times\left(\vec{n}\cos\theta-\vec{u}_3\right)\right]\cdot\vec{n}=$$

$$\frac{-ikI^2}{4\pi^2r^2}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\right|^2\left[\vec{u}_3\times\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)-\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\vec{u}_3\right)\cos\theta\right]\cdot\vec{n}=$$

$$\frac{-ikI^2}{4\pi^2r^2}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\right|^2\left[\vec{n}\left(\vec{u}_3\cdot\vec{u}_3\right)-\vec{u}_3\left(\vec{u}_3\cdot\vec{n}\right)-\vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{u}_3\right)\cos\theta+\right.$$

$$\left.\vec{u}_3\left(\vec{n}\cdot\vec{n}\right)\cos\theta\right]\cdot\vec{n}=\frac{-ikI^2}{4\pi^2r^2}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\right|^2\left(\vec{n}-\vec{u}_3\cos\theta-\vec{n}\cos^2\theta+\right.$$

$$\left.\vec{u}_3\cos\theta\right)\cdot\vec{n}=\frac{-ikI^2}{4\pi^2r^2}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\right|^2\sin^2\theta,\qquad(35.27)$$

expresie care, introdusă în (35.6) conduce la

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{ir^2}{k}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\left(\nabla\times\vec{H}\right)\times\vec{H}^*\right]\cdot\vec{n}\right\}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{ir^2}{k}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{-ikI^2}{4\pi^2r^2}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin^2\theta}\right|^2\sin^2\theta\right)\right]=\frac{I^2}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin\theta}\right|^2.\qquad(35.28)$$

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Vectorul electric este pe direcția componentei lui $\vec{A}$ perpendiculară pe $\vec{n}$ (adică direcția vectorului $(\vec{n}\times\vec{u}_3)\times\vec{n}$, sau, echivalent, direcția vectorului $\vec{H}\times\vec{n}$). Prin urmare, polarizarea radiației se află în planul ce conține antena și raza vectoare la punctul de observație.

Distribuția unghiulară (35.28) depinde, evident, de valoarea produsului kd. În limita lungimilor de undă mari $(kd \ll 1)$ este ușor de arătat că aceasta se reduce la rezultatul corespunzător dipolului

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{I^2}{32\,\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{kd}{2}\right)^4\sin^2\theta=\frac{\pi^2 I^2 d^4}{32}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sin^2\theta\,\frac{1}{\lambda^4}, \quad (35.29)$$

adică „legea cerului albastru" $(dP/d\Omega\sim\lambda^{-4})$ a lui Lord Rayleigh. Într-adevăr, pentru $kd\ll 1$ avem

$$\cos\left(\tfrac{kd}{2}\right)\cong 1-\frac{k^2d^2}{8},\quad \cos\left(\tfrac{kd}{2}\cos\theta\right)\cong 1-\frac{k^2d^2\cos^2\theta}{8}$$

și atunci

$$\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin\theta}\right|^2\cong\left|\frac{\frac{k^2d^2}{8}\left(1-\cos^2\theta\right)}{\sin\theta}\right|^2=\frac{k^4d^4}{64}\sin^2\theta,$$

care, introdusă în (35.28), conduce la (35.29).

Pentru valorile speciale $kd=\pi$ și $kd=2\pi$, care corespund lungimii antenei de jumătate de lungime de undă $(d=\lambda/2)$ și respectiv două jumătăți de lungime de undă $(d=\lambda)$ a curentului ce oscilează de-a lungul antenei, distribuțiile unghiulare sunt

$$\frac{dP}{d\Omega}=\frac{I^2}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left|\frac{\cos\left(\frac{kd}{2}\cos\theta\right)-\cos\frac{kd}{2}}{\sin\theta}\right|^2=$$

$$\frac{I^2}{8\pi^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\begin{cases}\dfrac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta},\ kd=\pi,\ \left(d=\dfrac{\lambda}{2}\right),\\[2ex] \dfrac{4\cos^4\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta},\ kd=2\pi,\ (d=\lambda).\end{cases} \quad (35.30)$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aceste distribuţii unghiulare sunt reprezentate grafic în figurile 35.2: Figura 35.2.a pentru antena semiundă, Figura 35.2.b pentru antena undă şi Figura 35.2.c, în care sunt reprezentate ambele distribuţii pe acelaşi grafic, pentru comparaţie.

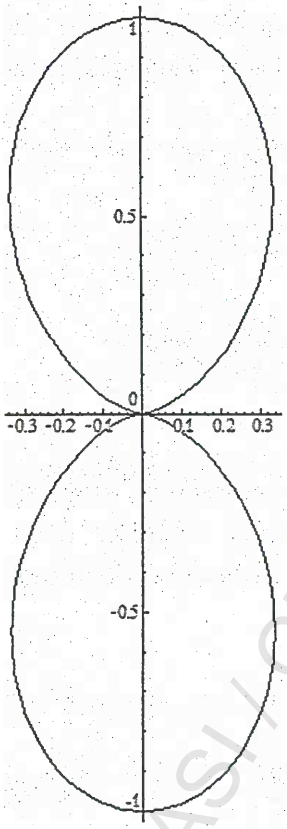


Figura 35.2.a

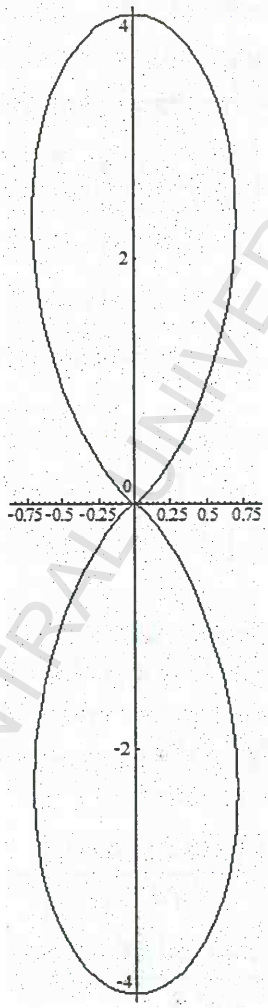


Figura 35.2.b

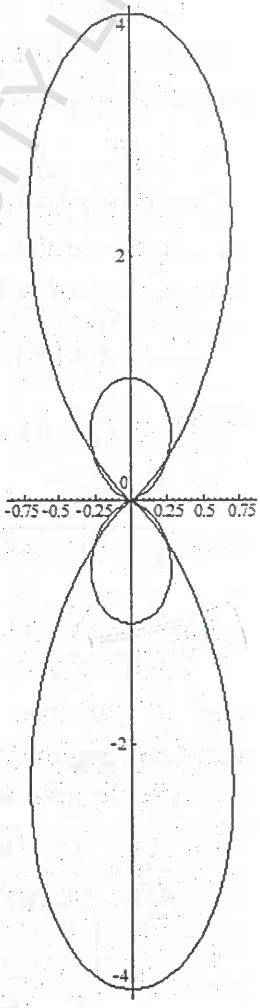


Figura 35.2.c

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În figurile 35.2 distribuțiile unghiulare ale puterii radiate de antenă sunt reprezentate ca diagrame de intensități polare cu ajutorul liniilor de comandă din Mathematica 5.0 date mai jos.

```
**********************************************************************

ParametricPlot[{Cos[(π/2)*Cos[t]]^2/Sin[t]^2*Cos[t],
Cos[(π/2)*Cos[t]]^2/Sin[t]^2*Sin[t]},{t,-π,π},
AspectRatio → Automatic];

ParametricPlot[{4*Cos[(π/2)*Cos[t]]^4/Sin[t]^2*Cos[t],
4*Cos[(π/2)*Cos[t]]^4/Sin[t]^2*Sin[t]},{t,-π,π},
AspectRatio → Automatic];

ParametricPlot[
{{Cos[(π/2)*Cos[t]]^2/Sin[t]^2*Cos[t], Cos[(π/2)*Cos[t]]^2/Sin[t]^2*Sin[t]},
{4*Cos[(π/2)*Cos[t]]^4/Sin[t]^2*Cos[t],
4*Cos[(π/2)*Cos[t]]^4/Sin[t]^2*Sin[t]}},{t,-π,π},
AspectRatio → Automatic];

**********************************************************************
```

sau, echivalent:

```
**********************************************************************

<< Graphics'Graphics'
```


BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$grsemiunda = PolarPlot[\{\frac{Cos[(\frac{\pi}{2})*Cos[t]]\wedge 2}{Sin[t]\wedge 2}, \frac{Cos[(\frac{\pi}{2})*Cos[t]]\wedge 2}{Sin[t]\wedge 2}\},$$

$$\{t, 0, 2\pi\}]$$

$$grunda = PolarPlot[\{\frac{4*Cos[(\frac{\pi}{2})*Cos[t]]\wedge 4}{Sin[t]\wedge 2}, \frac{4*Cos[(\frac{\pi}{2})*Cos[t]]\wedge 4}{Sin[t]\wedge 2}\},$$

$$\{t, 0, 2\pi\}]$$

$$Show[grsemiunda, grunda]$$

****

Distribuția antenei semiundă este foarte similară cu o figură dipolară simplă, iar antena undă întreagă are o distribuție mult mai ascuțită. Distribuția antenei undă poate fi imaginată ca datorată suprapunerii coerente a câmpurilor a două antene semiundă, una deasupra alteia, excitate în fază. Intensitatea la $\theta = \pi/2$, unde undele se adună algebric, este de patru ori mai mare decât cea a unei antene semiundă. La unghiuri îndepărtate de $\theta = \pi/2$ amplitudinile tind să interfere, dând o figură mai îngustă. Printr-un aranjament corespunzător al unui sistem de antene de bază, cum ar fi antenele semiundă, cu fazele curenților alese potrivit, pot fi formate figuri radiative arbitrare prin suprapunere coerentă.

Problema nr. 36

Să se determine limita spațială de aplicabilitate a electrodinamicii clasice în cazul electronului.

Rezolvare

Limita spațială de aplicabilitate a electrodinamicii clasice pentru electron este dată de „raza" electronului, considerat ca particula elementară. La distanțe mai mici decât raza electronului electrodinamica clasică nu mai furnizează rezultate corecte, fiind deci inaplicabilă.

BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITY LIBRARY

De altfel, așa cum vom vedea, efectele cuantice își fac simțită prezența începând cu distanțe chiar de peste o mie de ori mai mari decât raza „clasică" a electronului, ceea ce implică necesitatea considerării efectelor de natură cuantică încă de la o astfel de distanță.

Deoarece, așa cum se știe, în relativitatea restrânsă masa oricărei particule variază cu viteza acesteia, în cele ce urmează vom determina raza electronului în două cazuri mai importante: a) în cazul static (considerând electronul în repaus), pe baza unor considerente relativiste și b) electronul este în mișcare nerelativistă (viteza lui, $\vec{v}$, satisface condiția $|\vec{v}|/c \ll 1$).

a) În acest caz raza electronului se poate evalua pe baza echivalării energiei electromagnetice proprii a electronului cu energia sa de repaus.

Așa cum se știe, energia electrostatică a unui ansamblu de particule încărcate electric cu sarcinile q_k, $(k=1,2,3,...)$ și asimilabile unor puncte materiale este dată de relația

$$W=(1/2)\sum_k q_k V_k, \tag{36.1}$$

unde V_k este potențialul creat de toate particulele în punctul unde se găsește particula cu numărul de ordine k. Într-adevăr, densitatea de energie a câmpului electromagnetic fiind

$$w=(1/2)\left(\varepsilon E^2+\mu H^2\right),$$

în cazul static, când, evident, în sistemul de referință propriu, câmpul magnetic se anulează, aceasta devine

$$w_{static}=(1/2)\varepsilon E^2,$$

iar energia sistemului (care conține doar sarcini electrice – nu și curenți !) se scrie

$$W=(1/2)\int \varepsilon E^2 d\tau,$$

integrala extinzându-se pe întreg spațiul. Cum $\vec{E}=-\nabla V$ și $E^2=\vec{E}\cdot\vec{E}$, relația de mai sus se mai poate scrie astfel

$$W=-\frac{1}{2}\int \varepsilon\vec{E}\cdot\nabla V\, d\tau=-\frac{1}{2}\varepsilon\int\nabla\cdot\left(V\,\vec{E}\right)d\tau+\frac{1}{2}\varepsilon\int V\,\nabla\cdot\vec{E}\,d\tau, \tag{36.2}$$

unde a fost utilizată următoarea relație din analiza vectorială: $\nabla\cdot\left(V\,\vec{E}\right)=\vec{E}\cdot\nabla V+V\,\nabla\cdot\vec{E}$. Dar, conform teoremei Green-Gauss-Ostrogradski,

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int_{(D)} \nabla \cdot \left(V\,\vec{E}\right) d\tau = \oint_{(S)} V\,\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0,$$

deoarece domeniul tridimensional de integrare, D, fiind întreg spațiul, suprafața S care îl închide trebuie să se afle la infinit, adică acolo unde, atât potențialul câmpului electrostatic, V, cât și intensitatea acestui câmp, $\vec{E}$, se anulează. În plus, folosind și ecuația Maxwell cu surse pentru câmpul electric, $\nabla \cdot \vec{D} = \varepsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho_e$, unde ρ_e este densitatea volumică a sarcinilor electrice a sistemului, relația (36.2) devine

$$W = \frac{1}{2} \int \rho_e V d\tau,$$

care, în cazul unui sistem discret (când integrala se înlocuiește cu suma corespunzătoare), ia forma din relația (36.1).

Observație: Cu toate că relația (36.1) poate fi dedusă și direct, pornind de la analiza unui sistem discret de sarcini electrice punctiforme, am preferat să arătăm că ea este deductibilă din expresia generală a energiei unui câmp electromagnetic oarecare, tocmai pentru a scoate în evidență cadrul general, de câmp, al raționamentului aferent cazului a).

Să particularizăm rezultatul (36.1) pentru o singură particulă, anume electronul, care are sarcina electrică $e = -1{,}6 \cdot 10^{-19} C$ și masa de repaus $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$. „Energia potențială" a sistemului alcătuit dintr-un singur electron în repaus va fi

$$W_{e^-} = \frac{1}{2} e V_{e^-} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}, \qquad (36.3)$$

unde $V_{e^-} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R}$ este potențialul câmpului electrostatic creat de electronul în repaus.

Dacă electronul este presupus punct material, atunci $R = 0$ și, evident, atât V_{e^-}, cât și W_{e^-} vor fi infinite. Atunci, pe baza legăturii dintre masă și energie, cum „energia potențială" a electronului este infinită, urmează că și masa lui va fi infinită. Electrodinamica clasică nu ne poate spune dacă masa „proprie" a electronului este numai de natură electromagnetică. În mod formal, „renormarea" masei electronului s-ar putea realiza considerând o masă negativă, infinită, dar de natură

BUNAS / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

neelectromagnetică, care ar putea „compensa" valoarea infinită a masei electromagnetice. La ora actuală există foarte multe modele de renormare a masei electronului în cadrul teoriei electrodinamicii cuantice, unele de dată chiar foarte recentă, ceea ce dovedeşte actualitatea acestui subiect. De exemplu, cercetătorii Volker Bach, Thomas Chen, Juerg Froehlich şi Israel Michael Sigal au rezolvat această problemă (în cadrul teoriei electrodinamicii cuantice nerelativiste) într-un articol publicat relativ de curând în revista Journal of Functional Analysis [J. Funct. Anal., 243 (2), 426-535 (2007)] cu ajutorul aplicaţiilor Feshbach izospectrale netede din cadrul teoriei operatoriale a grupului de renormare.

Concluzia este că, pentru distanţe mici, electrodinamica clasică devine contradictorie: pe de o parte admite pentru masa electronului valoarea determinată chiar experimental, $m_0 = 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$ (care este o valoare extrem de mică), iar pe de altă parte, prin calculele prezentate deja mai sus prezice o masă infinită!

Considerând pentru electronul în repaus „echivalenţa" dintre energia sa electromagnetică, dată de relaţia (36.3), şi energia sa de repaus, $W_0 = m_0 c^2$, rezultă pentru electron o „rază proprie" cu puţin mai mare de $1\,fm = 10^{-15} m$

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R_0} = m_0 c^2 \Rightarrow R_0 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 m_0 c^2} \cong 1{,}4 \cdot 10^{-15} m . \qquad (36.4)$$

Această distanţă dă limita de aplicabilitate a electrodinamicii clasice în cazul electronului (se observă că această distanţă depinde de caracteristicile particulei – sarcina electrică şi masa de repaus – în cazul nostru, electronul). Această limită spaţială de aplicabilitate a electrodinamicii clasice este fixată de fapt de înseşi principiile de bază ale electrodinamicii clasice, care îşi pierd valabilitatea în domeniul spaţial începând nu cu distanţe de ordinul a $10^{-15} m$, ci chiar cu distanţe de ordinul

$$\lambda = \frac{h}{m_0 c} = 2{,}4 \cdot 10^{-12} m ,$$

când efectele cuantice devin notabile/de neneglijat.

b) Câmpul electromagnetic creat de electronul în mişcare este dat de relaţiile

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\dfrac{\partial V}{\partial \vec{r}} - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} = rot\ \vec{A}, \end{cases} \tag{36.5}$$

unde V şi $\vec{A}$ sunt potenţialele acestui câmp – potenţialele Wiechert-Lienard (vezi problema nr. 32)

$$V(\vec{r},t) = \left[\frac{e}{4\pi\varepsilon_o |\vec{r} - \vec{x}|(1 - \vec{n}\cdot\vec{\beta})} \right]_{t=t'+\frac{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}{c}}; \tag{36.6}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \left[\frac{\mu_o e c \vec{\beta}}{4\pi |\vec{r} - \vec{x}|(1 - \vec{n}.\vec{\beta})} \right]_{t=t'+\frac{|\vec{r}-\vec{x}(t')|}{c}}, \tag{36.7}$$

în care $\vec{x} = \vec{x}(t')$ este ecuaţia traiectoriei electronului, $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al punctului în care se determină potenţialele (punctul de „observaţie"), $\vec{n}$ este versorul direcţiei $\vec{r} - \vec{x}$, iar $c\vec{\beta} = d\vec{x}/dt'$, cu $\vec{v} = d\vec{x}/dt'$ – viteza electronului pe traiectoria sa. Precizăm faptul că în relaţiile (36.5) derivatele se fac în raport cu coordonatele x, y, z şi timpul t corespunzătoare observatorului.

Pentru a simplifica scrierea, vom nota cu $\vec{R}$ vectorul $\vec{R} = \vec{r} - \vec{x}$, adică vectorul de poziţie al punctului de observaţie faţă de punctul în care se află electronul (vezi figura 36.1).

Dacă $P(\vec{r})$ este punctul de observare, iar $P'(\vec{x})$ este punctul unde se găseşte electronul, semnalul electromagnetic emis de electron la momentul t' va sosi în punctul de observare la momentul ulterior

$$t = t' + \left|\vec{r} - \vec{x}(t')\right|/c = t' + R(t')/c, \tag{36.8}$$

unde $\vec{r} = \vec{x} + \vec{R}$. Dacă privim relaţia (36.8) ca pe o ecuaţie în t', atunci al doilea postulat al teoriei relativităţii restrânse a lui Einstein asigură faptul că această ecuaţie are soluţie unică. Într-adevăr, cum viteza electronului nu poate depăşi viteza luminii în vid şi întrucât numai evenimentele din trecutul absolut pot influenţa observatorul, urmează că doar semnalul emis în $P'(\vec{x})$ va ajunge în $P(\vec{r})$.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

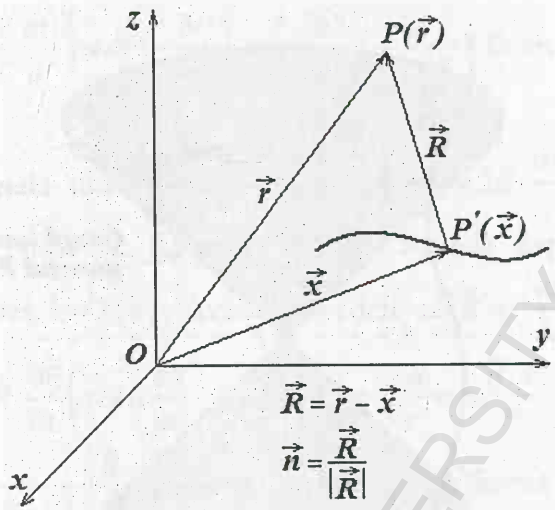


Fig. 36.1

Cel de-al doilea punct de intersecție al curbei de univers a electronului cu conul luminos nu poate conduce la o soluție cauzală, deoarece pânza superioară a conului corespunde viitorului absolut (această soluție a ecuației încalcă principiul cauzalității) – vezi figura 36.2.

Cu noile notații, expresiile celor două potențiale devin

$$V(\vec{r},t)=\left[\frac{e}{4\pi\varepsilon_o\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\right]_{t=t'+\frac{R}{c}}\equiv\frac{e}{4\pi\varepsilon_o\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)} \qquad (36.9)$$

și

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\left[\frac{\mu_o e\vec{v}}{4\pi\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\right]_{t=t'+\frac{R}{c}}\equiv\frac{\mu_o e\vec{v}}{4\pi\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}, \qquad (36.10)$$

unde, pentru o și mai mare simplificare a scrierii, am omis indicele parantezelor pătrate, subînțelegând faptul că mărimile din membrul drept trebuiesc considerate pentru $t'=t-R/c$.

Din relațiile (36.9) și (36.10) se observă că $\vec{A}=\frac{\vec{v}}{c^2}V$ și atunci

$$\vec{E}=-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}}-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\frac{\partial V}{\partial\vec{r}}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{v}V)=-\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}+\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)V-\frac{V}{c^2}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}=$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

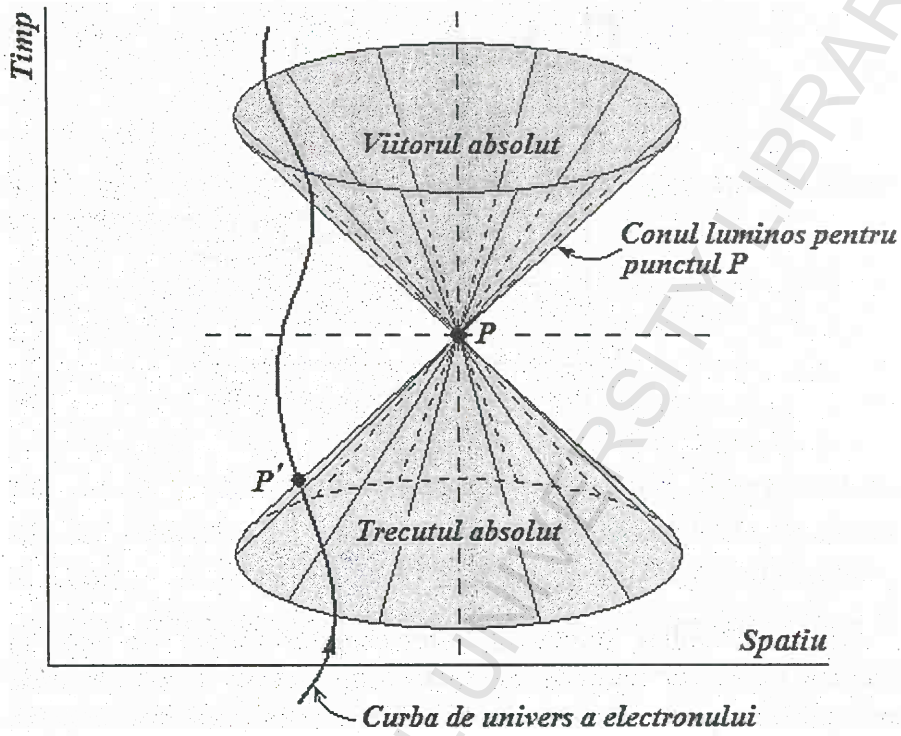


Fig. 36.2

$$\frac{-e}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}+\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^{-1}-\frac{V}{c^2}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_o\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}\times$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}+\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)-\frac{\vec{a}V}{c^2}\frac{\partial t'}{\partial t},\qquad(36.11)$$

unde s-a ținut cont de faptul că accelerația electronului este $\vec{a}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t'}$.

Expresia derivatei $\frac{\partial t'}{\partial t}$ poate fi găsită pornind de la relația evidentă $R=c(t-t')$, de unde, prin derivare parțială în raport cu timpul t se

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

obține $\frac{\partial R}{\partial t}\left(=\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}\right)=c\left(1-\frac{\partial t'}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{c}{c+\frac{\partial R}{\partial t'}}$. Derivata parțială $\frac{\partial R}{\partial t'}$ poate fi exprimată din $\frac{\partial R^2}{\partial t'}=\frac{\partial\left(\vec{R}\cdot\vec{R}\right)}{\partial t'}=2\vec{R}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial t'}=2\vec{R}\cdot\frac{\partial\left(\vec{r}-\vec{x}\right)}{\partial t'}=-2\vec{R}\cdot\vec{v}$, unde s-a ținut cont de faptul că $\vec{r}$ nu depinde explicit de t', iar $\vec{v}=\frac{d\vec{x}}{dt'}\equiv\frac{\partial\vec{x}}{\partial t'}$, căci $\vec{x}=\vec{x}(t')$. Având în vedere că $\vec{R}$ și $\frac{\partial\vec{R}}{\partial t'}$ sunt coliniari, urmează că $2\vec{R}\cdot\frac{\partial\vec{R}}{\partial t'}\left(=2R\frac{\partial R}{\partial t'}\right)=-2\vec{R}\cdot\vec{v} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial t'}=-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R}$ și atunci $\frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{c}{c+\frac{\partial R}{\partial t'}}=\frac{c}{c-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R}}=\frac{R}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}$. Cu acest rezultat în expresia (36.11) rezultă

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_o\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}+\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)-\frac{eR\vec{a}}{4\pi\varepsilon_o c^2\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}. \tag{36.12}$$

Astfel, au mai rămas de calculat derivatele $\frac{\partial R}{\partial\vec{r}}$, $\frac{\partial R}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)$ și $\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)$. Avem $\frac{\partial t'}{\partial\vec{r}}=\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(t-\frac{R}{c}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial\vec{r}}$, căci x, y, z și t sunt variabile independente. Apoi, mărimea R poate fi reprezentată fie în coordonatele punctului de observație, $R=R(t,x,y,z)$, fie în cele ale punctului în care se află sursele (în cazul acesta, electronul), $R=R(t',x',y',z')$, unde x', y' și z' sunt coordonatele punctului definit de vectorul $\vec{x}(t')$. Alegând cea de-a doua variantă, rezultă că derivata lui R în raport cu $\vec{r}$ trebuie exprimată prin intermediul variabilelor t', x', y' și z' astfel

$$\frac{\partial R}{\partial\vec{r}}=\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial\vec{r}}+\frac{\partial R}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial\vec{r}}+\frac{\partial R}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial\vec{r}}+\frac{\partial R}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial\vec{r}}.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dar $\frac{\partial R}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial \vec{r}}\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vec{r}}$. În mod analog, $\frac{\partial R}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vec{r}}$ şi $\frac{\partial R}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \vec{r}}$. Apoi, $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}=\frac{x-x'}{R}$ şi, la fel, $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{y-y'}{R}$ şi $\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{z-z'}{R}$. Deoarece $\frac{\partial x}{\partial \vec{r}}=grad\, x=\vec{i}\frac{\partial x}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial x}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial x}{\partial z}=\vec{i}$ şi, analog, $\frac{\partial y}{\partial \vec{r}}=\vec{j}$ şi $\frac{\partial z}{\partial \vec{r}}=\vec{k}$, unde $\vec{i}$, $\vec{j}$ şi $\vec{k}$ sunt versorii axelor Ox, Oy şi respectiv Oz, urmează că $\frac{\partial R}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \vec{r}}+\frac{\partial R}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \vec{r}}+\frac{\partial R}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \vec{r}}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \vec{r}}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \vec{r}}=\vec{i}\frac{x-x'}{R}+\vec{j}\frac{y-y'}{R}+\vec{k}\frac{z-z'}{R}=\frac{\vec{R}}{R}$. Atunci $\frac{\partial R}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial \vec{r}}+\frac{\partial R}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \vec{r}}+\frac{\partial R}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \vec{r}}+\frac{\partial R}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial \vec{r}}+\frac{\vec{R}}{R}=-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R}\frac{\partial t'}{\partial \vec{r}}+\frac{\vec{R}}{R}$. Aşadar, $\frac{\partial t'}{\partial \vec{r}}\left[=\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(t-\frac{R}{c}\right)\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial \vec{r}}=-\frac{1}{c}\left(-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R}\frac{\partial t'}{\partial \vec{r}}+\frac{\vec{R}}{R}\right)=\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{cR}\frac{\partial t'}{\partial \vec{r}}-\frac{\vec{R}}{cR}$, de unde

$$\frac{\partial t'}{\partial \vec{r}}=-\frac{\vec{R}}{cR}\frac{1}{1-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{cR}}=-\frac{\vec{R}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}$$ şi deci

$$\frac{\partial R}{\partial \vec{r}}=-c\frac{\partial t'}{\partial \vec{r}}=c\frac{\vec{R}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}=\frac{\vec{R}}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}. \qquad (36.13)$$

Expresia derivatei $\frac{\partial R}{\partial t}$ rezultă simplu din calculele anterioare

$$\frac{\partial R}{\partial t}=c\left(1-\frac{\partial t'}{\partial t}\right)=c\left(1-\frac{R}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}\right)=-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}. \qquad (36.14)$$

Să calculăm acum derivata $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)$. Avem

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)=\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left[\left(\vec{r}-\vec{x}\right)\cdot\vec{v}\right]=\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\vec{r}\cdot\vec{v}-\vec{x}\cdot\vec{v}\right)=\vec{v}+\vec{r}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}-\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{r}}\cdot\vec{v}-\vec{x}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}.$$

Dar $\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial \vec{v}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial \vec{r}}=\vec{a}\frac{\partial t'}{\partial \vec{r}}=-\frac{\vec{R}\,\vec{a}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}$ și $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{r}}=\frac{\partial \vec{x}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial \vec{r}}=-\vec{v}\frac{\vec{R}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}=$

$-\frac{\vec{R}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\vec{v}$, astfel că

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)=\vec{v}+\vec{r}\cdot\left[-\frac{\vec{a}\,\vec{R}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\right]-\left[-\frac{\vec{R}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\vec{v}\right]\cdot\vec{v}-$$

$$\vec{x}\cdot\left[-\frac{\vec{a}\,\vec{R}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\right]=\vec{v}-\left(\vec{r}-\vec{x}\right)\cdot\frac{\vec{a}\,\vec{R}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}+\frac{v^2\vec{R}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}= \quad (36.15)$$

$$\vec{v}+\frac{v^2-\vec{R}\cdot\vec{a}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\vec{R}.$$

În fine, pentru $\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)$ avem

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\vec{r}-\vec{x}\right)\cdot\vec{v}\right]=\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\cdot\vec{v}+\vec{r}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}-\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\cdot\vec{v}-\vec{x}\cdot\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

Apoi, formal putem scrie $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}=\frac{\partial \vec{r}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=0\frac{\partial t'}{\partial t}=0$, căci $\vec{r}$ nu depinde explicit de t'. Pentru $\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$ putem scrie în mod analog

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}=\frac{\partial \vec{x}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=\vec{v}\frac{R}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}$, iar pentru $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ avem $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}=\frac{\partial \vec{v}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}=\vec{a}\frac{R}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}$.

Cu toate aceste derivate în expresia lui $\partial\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)/\partial t$ obținem

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)=\left(\vec{r}-\vec{x}\right)\cdot\frac{\vec{a}R}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}-\frac{v^2R}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}=\frac{\vec{R}\cdot\vec{a}-v^2}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}R. \qquad (36.16)$$

Introducând rezultatele (36.13)÷(36.16) în expresia (36.12) a lui $\vec{E}$ se găseşte că

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_o\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}\left(\frac{\partial}{\partial\vec{r}}+\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)-\frac{eR\vec{a}}{4\pi\varepsilon_o c^2\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}=$$

$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_o\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}\left[\frac{\partial R}{\partial\vec{r}}+\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\partial R}{\partial t}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)-\frac{\vec{v}}{c^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)\right]-$$

$$\frac{eR\vec{a}}{4\pi\varepsilon_o c^2\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_o\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}\left\{\frac{\vec{R}}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}-\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}-\frac{1}{c}\times\right.$$

$$\left.\left[\vec{v}+\frac{v^2-\vec{R}\cdot\vec{a}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\vec{R}\right]-\frac{\vec{v}}{c^3}\frac{\vec{R}\cdot\vec{a}-v^2}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}R\right\}-\frac{eR\vec{a}}{4\pi\varepsilon_o c^2\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}=$$

$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_o\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}\left[\vec{R}-\frac{\vec{v}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)}{c^2}-\frac{\vec{v}}{c}\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)-\frac{v^2\vec{R}}{c^2}+\frac{\vec{R}\left(\vec{R}\cdot\vec{a}\right)}{c^2}-\frac{\vec{v}R\left(\vec{R}\cdot\vec{a}\right)}{c^3}+\right.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{v^2}{c^2}\frac{\vec{v}R}{c}-\frac{R\vec{a}}{c^2}\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)\Bigg]=\frac{e}{4\pi\varepsilon_o\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}\left\{\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c^2}\right]\left(\vec{R}-\frac{R\vec{v}}{c}\right)-\right.$$

$$\left.\frac{R\vec{a}}{c^2}\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)\right\},$$

sau, utilizând formula $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$ pentru vectorii $\vec{A}\equiv\vec{R}$, $\vec{B}\equiv\vec{R}-\frac{R\vec{v}}{c}$ şi $\vec{C}\equiv\vec{a}$

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R\vec{v}}{c}\right)+\frac{\vec{R}}{c^2}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R\vec{v}}{c}\right)\times\vec{a}\right]}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}=\vec{E}_v+\vec{E}_a,\quad(36.17)$$

unde

$$\vec{E}_v=\frac{e}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R\vec{v}}{c}\right)}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}\quad(36.18)$$

este componenta electrică a câmpului electromagnetic creat de electronul în mişcare, ce depinde numai de viteza electronului, iar

$$\vec{E}_a=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0c^2}\frac{\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R\vec{v}}{c}\right)\times\vec{a}\right]}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\,\vec{R}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R\vec{v}}{c}\right)\times\vec{a}\right]}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}\quad(36.19)$$

este componenta care depinde şi de acceleraţia electronului.

Inducţia componentei magnetice a câmpului este

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\nabla\times\left(\frac{\vec{v}V}{c^2}\right)=\frac{1}{c^2}\nabla V\times\vec{v}+\frac{V}{c^2}\nabla\times\vec{v},\quad(36.20)$$

în care

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\nabla V \equiv \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}\right) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^{-1} = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\times$$

$$\frac{1}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right) = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}\left[\frac{\partial R}{\partial \vec{r}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\vec{R}\cdot\vec{v}\right)\right] =$$

$$\underset{(36.15)}{\overset{(36.13)}{=}} -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}\left\{\frac{\vec{R}}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}-\frac{1}{c}\left[\vec{v}+\frac{v^2-\vec{R}\cdot\vec{a}}{c\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}\vec{R}\right]\right\} =$$

$$-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}-\frac{\vec{v}}{c}\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)-\frac{v^2}{c^2}\vec{R}+\frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c^2}\vec{R}}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3} =$$

$$-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)-\frac{\vec{v}}{c}\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}$$

şi (36.21)

$$\nabla\times\vec{v} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\vec{u}_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x_j}\vec{u}_i = \varepsilon_{ijk}a_k\frac{\partial t'}{\partial x_j}\vec{u}_i \overset{(36.11)}{=} \varepsilon_{ijk}a_k\left(\frac{1}{c}\frac{-R_j}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}\right)\vec{u}_i =$$

$$-\frac{1}{c}\frac{1}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}\varepsilon_{ijk}R_j a_k\vec{u}_i = -\frac{1}{c}\frac{1}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}\left(\vec{R}\times\vec{a}\right) = -\frac{1}{c}\frac{\vec{R}\times\vec{a}}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}, \quad (36.22)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde am ținut cont de proiecția pe axa Ox_j a relației vectoriale $\frac{\partial t'}{\partial \vec{r}} =$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(t-\frac{R}{c}\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial \vec{r}} \overset{(36.13)}{=} -\frac{\vec{R}}{c}\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^{-1}.$$

Cu (36.21) şi (36.22) în (36.20) rezultă

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=\nabla\times\left(\frac{\vec{v}V}{c^2}\right)=\frac{1}{c^2}\nabla V\times\vec{v}+\frac{V}{c^2}\nabla\times\vec{v}=$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{R}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)-\frac{\vec{v}}{c}\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}\times\vec{v}+\frac{V}{c^2}\left(-\frac{1}{c}\frac{\vec{R}\times\vec{a}}{R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}}\right)=$$

$$-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)\left(\vec{R}\times\vec{v}\right)}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\frac{\vec{R}\times\vec{a}}{c}}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}=$$

$$-\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)\left(\vec{R}\times\vec{v}\right)+\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)\frac{\vec{R}\times\vec{a}}{c}}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}.$$

Aşadar, expresiile finale pentru cele două componente ale câmpului electromagnetic creat de un electron în mişcare, cu viteza $\vec{v}$, sunt

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\vec{R}-\frac{R\vec{v}}{c}\right)+\frac{\vec{R}}{c^2}\times\left[\left(\vec{R}-\frac{R\vec{v}}{c}\right)\times\vec{a}\right]}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3} \qquad (36.23)$$

şi

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{\vec{R}\cdot\vec{a}}{c^2}\right)\left(e\,\vec{v}\times\vec{R}\right)+\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)\frac{e\,\vec{a}\times\vec{R}}{c}}{\left(R-\frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}. \qquad (36.24)$$

În cazul particular când mişcarea electronului este rectilinie uniformă (acceleraţia este nulă) iar $|\vec{v}|\ll c$, şi astfel poate fi omis nu doar raportul v^2/c^2, ci chiar şi raportul $v/c=|\vec{v}|/c$, expresiile celor două componente (36.23) şi (36.24) ale câmpului electromagnetic generat de electronul în mişcare devin

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{R}}{R^3} \qquad (36.25)$$

şi respectiv

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e\,\vec{v}\times\vec{R}}{R^3}. \qquad (36.26)$$

Dacă adoptăm pentru electron modelul în care el este o sferă de rază R_0 încărcată uniform cu sarcina electrică de densitate superficială $\sigma_e=e/4\pi R_0^2$, atunci energia sa va fi

$$W=\frac{1}{2}\varepsilon_0\int_{(D)}E^2dV+\frac{1}{2\mu_0}\int_{(D)}B^2dV=\frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\sin\theta dr d\theta d\varphi+$$

$$\frac{\mu_0e^2v^2}{32\pi^2}\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\sin^3\theta dr d\theta d\varphi=\frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_{R_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi+\frac{\mu_0e^2v^2}{32\pi^2}\times$$

$$\int_{R_0}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)_{R_0}^{\infty}4\pi+\frac{\mu_0e^2v^2}{32\pi^2}\left(-\frac{1}{r}\right)_{R_0}^{\infty}\left(\frac{1}{12}\cos3\theta-\right.$$

$$\left.\frac{3}{4}\cos\theta\right)_0^{\pi}2\pi=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0R_0}+\frac{\mu_0e^2v^2}{12\pi R_0}=\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0R_0}\left(1+\frac{2}{3}\frac{v^2}{c^2}\right)\cong\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0R_0},$$

adică aproximativ aceeaşi valoare cu cea obţinută în cazul electronului în repaus [vezi relaţia (36.3)], ceea ce va conduce la aproximativ aceeaşi valoare a razei electronului ca cea dată de relaţia (36.4), corespunzătoare electronului în repaus. În concluzie, faptul că electronul are o mişcare

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

nerelativistă şi nu este în repaus nu afectează simțitor nici valoarea energiei şi nici cea a razei lui.

Pe de altă parte, evaluând separat energia câmpului magnetic al electronului în mişcare cu viteza $v \ll c$, obținem

$$W_{magn} = \frac{1}{2\mu_0}\int\limits_{(D)} B^2 dV = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{32\pi^2}\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\frac{1}{r^2}\sin^3\theta dr d\theta d\varphi = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{12\pi R_0}. \quad (36.27)$$

Deoarece mişcarea electronului a fost presupusă nerelativistă, energia lui cinetică are forma clasică, $E_{cin} = mv^2/2$, de unde, $v^2 = 2E_{cin}/m$, care, introdusă în expresia energiei câmpului magnetic (36.27) conduce la relația

$$W_{magn} = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{12\pi R_0} = \frac{e^2 E_{cin}}{6\pi\varepsilon_0 mc^2 R_0} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0}\frac{E_{cin}}{mc^2}. \quad (36.28)$$

Dar energia câmpului magnetic „dispare" atunci când electronul este în repaus, sau, cu alte cuvinte, atunci când energia lui cinetică se anulează. Aceasta înseamnă că $W_{magn} = E_{cin}$, iar relația (36.28) devine

$$mc^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R_0}, \quad (36.28')$$

relație care poate fi privită fie ca „definiție" a masei electromagnetice a electronului (adoptând pentru raza „clasică" a electronului valoarea

$$R_0^{clasic} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = 2{,}8\cdot 10^{-15} m, \quad (36.29)$$

unde $m = 9{,}1\cdot 10^{-31} kg$ este masa de repaus a electronului), lucru stabilit pentru prima dată de către J.J. Thomson în anul 1881, fie ca una din „definițiile" razei electronului

$$R_0 = \frac{2e^2}{12\pi\varepsilon_0 mc^2} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = \frac{2}{3}R_0^{clasic} = 0{,}9(3)\cdot 10^{-15} m. \quad (36.30)$$

Se poate observa însă că, indiferent de modul în care este determinată/definită raza electronului, aceasta are o valoare de ordinul a $10^{-15} m = 1 fm$, mărime care exprimă totodată şi „limita" spațială de aplicabilitate a electrodinamicii clasice în cazul electronului.

BCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 37

Să se descompună în unde plane câmpul electromagnetic generat de un electron în mişcare rectilinie şi uniformă în vid.

Rezolvare

Fie $\vec{v}$ viteza electronului, e sarcina acestuia (în modul), ρ densitatea de sarcină şi $\vec{A}(\vec{r},t)$ şi $V(\vec{r},t)$ potenţialele asociate câmpului electronului. Alegând ca origine poziţia electronului la momentul $t=0$, putem scrie densitatea cu ajutorul distribuţiei δ a lui Dirac

$$\rho = e\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_o) = e\,\delta(\vec{r}-\vec{v}\,t)\,. \tag{37.1}$$

Atunci, ecuaţiile de tip D'Alembert, neomogene, satisfăcute de potenţialele $\vec{A}(\vec{r},t)$ şi $V(\vec{r},t)$ sunt

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_o\, e\vec{v}\,\delta(\vec{r}-\vec{v}\,t)\,, \tag{37.2}$$

respectiv

$$\Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{e}{\varepsilon_o}\,\delta(\vec{r}-\vec{v}\,t)\,. \tag{37.3}$$

Se observă că

$$\vec{A} = \frac{V}{c^2}\vec{v}\,; \tag{37.4}$$

prin urmare, va fi suficient să ne ocupăm de un singur potenţial, fie acesta V.

Păstrând neschimbat timpul t şi notând cu $V_{\vec{k}}(t)$ transformata Fourier a lui $V(\vec{r},t)$, avem

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int V_{\vec{k}}(t)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,d\vec{k}\,. \tag{37.5}$$

Dacă introducem (37.5) în (37.3) şi scriem transformata Fourier a lui $\delta(\vec{r}-\vec{v}\,t)$, avem

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left[-k^2 V_{\vec{k}}(t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V_{\vec{k}}(t)}{\partial t^2}\right]e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,d\vec{k} = -\frac{e}{(2\pi)^3\varepsilon_o}\int e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{v}t)}\,d\vec{k}\,,$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

de unde, prin egalarea integranzilor,

$$\frac{\partial^2 V_{\vec{k}}(t)}{\partial t^2}+c^2k^2V_{\vec{k}}(t)=\frac{c^2e}{(2\pi)^{3/2}\varepsilon_o}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{v}t}. \tag{37.6}$$

Vom căuta soluția acestei ecuații de forma

$$V_{\vec{k}}(t)=V_{\vec{k}o}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{v}t}, \tag{37.7}$$

care, introdusă în (37.6), conduce la

$$V_{\vec{k}}(t)=\frac{e}{(2\pi)^3\varepsilon_o}\,\frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{v}t}}{k^2-c^{-2}\left(\vec{k}\cdot\vec{v}\right)^2}. \tag{37.8}$$

Utilizând acest rezultat, avem din (37.5)

$$V(\vec{r},t)=\frac{e}{(2\pi)^3\varepsilon_o}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{v}t)}}{k^2-\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}d\vec{k}, \tag{37.9}$$

iar din (37.4)

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\frac{e\vec{v}}{(2\pi)^3c^2\varepsilon_o}\int\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{v}t)}}{k^2-\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2}d\vec{k}. \tag{37.10}$$

Transformatele Fourier căutate sunt atunci

$$V_{\vec{k}}(\vec{r},t)=\frac{e}{(2\pi)^3\varepsilon_o}\,\frac{e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{v}t)}}{k^2-\left(\frac{\vec{k}\cdot\vec{v}}{c}\right)^2} \tag{37.11}$$

și

$$\vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r},t)=\frac{\vec{v}}{c^2}V_{\vec{k}}(\vec{r},t). \tag{37.12}$$

În această reprezentare, câmpul electromagnetic asociat electronului este așadar

$$\vec{e}_{\vec{k}}=-\nabla V_{\vec{k}}-\frac{\partial\vec{A}_{\vec{k}}}{\partial t}=-\nabla V_{\vec{k}}-\frac{\vec{v}}{c^2}\frac{\partial V_{\vec{k}}}{\partial t} \tag{37.13}$$

și

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{b}_{\vec{k}} = \nabla \times \vec{A}_{\vec{k}} = -\frac{1}{c^2}\vec{v} \times \nabla V_{\vec{k}}. \tag{37.14}$$

Utilizând (37.11) , (37.12) şi efectuând calculele, obţinem

$$\vec{e}_{\vec{k}} = -\frac{ie}{(2\pi)^3 \varepsilon_o} \frac{\vec{k} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\left(\vec{k}\cdot\vec{v}\right)}{k^2 - \frac{\left(\vec{k}\cdot\vec{v}\right)^2}{c^2}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{v}t)} \tag{37.14}$$

şi

$$\vec{b}_{\vec{k}} = \frac{ie\mu_o}{(2\pi)^3} \frac{\vec{k}\times\vec{v}}{k^2 - \frac{\left(\vec{k}\cdot\vec{v}\right)^2}{c^2}} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{v}t)}. \tag{37.15}$$

Se observă că, spre deosebire de undele plane libere care sunt pur transversale, câmpul electric $\vec{e}_{\vec{k}}$ are şi o componentă longitudinală, al cărei modul este

$$\left|\vec{e}_{\vec{k}}^{\,long}\right| = A \frac{\vec{k}\cdot\vec{s} - c^{-2}\left(\vec{v}\cdot\vec{s}\right)\left(\vec{k}\cdot\vec{v}\right)}{k^2 - c^{-2}\left(\vec{k}\cdot\vec{v}\right)^2} = \frac{A}{k}, \tag{37.16}$$

unde A este o constantă, iar $\vec{s}$ este versorul vectorului de undă $\vec{k}$. Avem aşadar

$$\vec{e}_{\vec{k}}^{\,long} = \frac{A}{k}\vec{s} = -\frac{ie}{(2\pi)^3\varepsilon_o}\frac{\vec{k}}{k^2} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{v}t)}. \tag{37.17}$$

Se mai observă că

$$\vec{b}_{\vec{k}}^{\,long} = 0. \tag{37.18}$$

Dacă $\vec{v} \to 0$, $\vec{e}_k^{\,trans} \to 0$ şi regăsim cazul (electro)static.

Problema nr. 38

Un atom radiază unde electromagnetice şi rămâne într-o stare excitată un timp τ. Dependenţa temporală a câmpului electric emis de atom este de forma

BCUIASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$E(t)=E_0\, e^{-\frac{t}{\tau}-i\omega_0 t}.$$

Să se determine lățimea liniei spectrale emise de atom.

Rezolvare

Evident, înainte de a emite unda electromagnetică, atât componenta electrică, $\vec{E}$, cât și cea magnetică, $\vec{B}$, ale undei sunt nule. Deoarece mărimea componentei magnetice a câmpului electromagnetic emis de atom este neglijabilă în raport cu cea electrică, în continuare ne vom referi doar la aceasta din urmă.

Având în vedere observațiile de mai sus, putem scrie că dependența temporală a câmpului electromagnetic emis de atom este de forma

$$E(t)=\begin{cases}0, & pentru\ \ t<0,\\ E_0\, e^{-\frac{t}{\tau}-i\omega_0 t}, & pentru\ \ t>0.\end{cases} \tag{38.1}$$

Deoarece dependența de timp și de pulsația ω este una continuă, reprezentarea Fourier sub formă integrală a câmpului emis de atom se poate scrie astfel

$$E(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}E(\omega)e^{-i\omega t}d\omega, \tag{38.2}$$

unde $E(\omega)$ este transformata Fourier a lui $E(t)$

$$E(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}E(t)e^{i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}0\cdot e^{i\omega t}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}E_0\, e^{-\frac{t}{\tau}-i\omega_0 t}e^{i\omega t}dt=$$

$$\frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t}{\tau}-i(\omega_0-\omega)t}dt=\frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-t\left[\frac{1}{\tau}+i(\omega_0-\omega)\right]}dt=\frac{E_0}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-1}{\frac{1}{\tau}+i(\omega_0-\omega)}\times\right.$$

$$\left.e^{-t\left[\frac{1}{\tau}+i(\omega_0-\omega)\right]}\right]_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{E_0}{\sqrt{2\pi}\left[\frac{1}{\tau}+i(\omega_0-\omega)\right]}.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Intensitatea radiației emise de atom este proporțională cu modulul pătrat al acestei transformate Fourier

$$I(\omega)\propto\left|E(\omega)\right|^2=\frac{E_0^2}{2\pi}\frac{1}{\left|\frac{1}{\tau}+i(\omega_0-\omega)\right|^2}=\frac{E_0^2}{2\pi}\frac{1}{\left[\frac{1}{\tau}+i(\omega_0-\omega)\right]\left[\frac{1}{\tau}-i(\omega_0-\omega)\right]}=$$

$$\frac{E_0^2}{2\pi}\frac{1}{\frac{1}{\tau^2}+(\omega_0-\omega)^2},$$

sau

$$I(\omega)=\frac{I_0}{\frac{1}{\tau^2}+(\omega_0-\omega)^2}, \tag{38.3}$$

unde expresia exactă a lui I_0 (care nu ne interesează aici) rezultă din

$$I_0=\int_{-\infty}^{+\infty}I(\omega)\,d\omega. \tag{38.4}$$

După cum se știe din teoria radiației, semi-lărgimea unei linii spectrale emise de un atom este determinată de relația

$$I\left(\omega_0\pm\frac{\Delta\omega}{2}\right)=\frac{1}{2}I(\omega_0), \tag{38.5}$$

relație care, ținând cont de (38.3) se rescrie astfel:

$$\frac{I_0}{\frac{1}{\tau^2}+\left[\omega_0-\left(\omega_0\pm\frac{\Delta\omega}{2}\right)\right]^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{I_0}{\frac{1}{\tau^2}}=\frac{I_0\tau^2}{2},$$

sau

$$\frac{1}{\tau^2}+\left[\omega_0-\left(\omega_0\pm\frac{\Delta\omega}{2}\right)\right]^2=\frac{2}{\tau^2},$$

iar de aici

$$\left(\pm\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2=\frac{1}{\tau^2}\Leftrightarrow\frac{\Delta\omega}{2}=\frac{1}{\tau}\Rightarrow\Delta\omega=\frac{2}{\tau}. \tag{38.6}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

VI. MIŞCAREA PARTICULELOR ÎNCĂRCATE ÎN CÂMP ELECTROMAGNETIC

Problema nr. 39

Să se determine mişcarea unui electron într-un câmp electromagnetic static şi uniform, în care vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt paraleli, presupunând că viteza sa iniţială, $\vec{v}_0$, este perpendiculară pe direcţia comună a celor două câmpuri.

Rezolvare

Ecuaţia de mişcare a unui electron în câmpul electromagnetic static şi uniform $\left(\vec{E},\ \vec{B}\right)$ este

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right), \tag{39.1}$$

unde m este masa electronului, iar $(-e)$ este sarcina sa electrică.

Fără a restrânge cu nimic generalitatea problemei, vom considera că vectorii (paraleli) $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ sunt orientaţi în direcţia şi sensul axei Oz, iar viteza iniţială, $\vec{v}_0$, a electronului (perpendiculară pe direcţia comună a celor două câmpuri) este orientată după axa Ox.

Atunci, deoarece

$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \dot{y}B\vec{i} - \dot{x}B\vec{j},$$

în proiecţie pe cele trei axe de coordonate, ecuaţia (39.1) se va scrie astfel

$$\begin{cases} Ox: & m\ddot{x} = -eB\dot{y}, \\ Oy: & m\ddot{y} = eB\dot{x}, \\ Oz: & m\ddot{z} = -eE. \end{cases} \tag{39.2}$$

Ultima ecuaţie din (39.2) arată faptul că mişcarea electronului de-a lungul axei Oz este uniform accelerată ($E = const.$)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$z(t)=-\frac{eE}{2m}t^2+\frac{C_1}{m}t+\frac{C_2}{m},$$

unde C_1 şi C_2 sunt două constante arbitrare de integrare, determinabile din condiţiile iniţiale. Considerând ca origine a sistemului de coordonate poziţia iniţială a electronului la momentul $t=0$, avem $z(0)=0$ şi, conform presupunerii anterioare privitoare la viteza iniţială, avem şi $\dot{z}(0)=0$. Aceste două condiţii conduc la valori nule pentru cele două constante, astfel că

$$z(t)=-\frac{eE}{2m}t^2. \tag{39.3}$$

A rămas de integrat sistemul de ecuaţii diferenţiale ordinare cuplate

$$\begin{cases} m\ddot{x}=-eB\dot{y}\,, \\ m\ddot{y}=eB\dot{x}\,. \end{cases}$$

Pentru a integra acest sistem de ecuaţii vom utiliza variabila complexă $\xi=x+iy$. În acest sens, înmulţind a doua ecuaţie a sistemului cu numărul complex $i=\sqrt{-1}$ şi adunând-o cu prima, rezultă

$$\ddot{\xi}-i\frac{eB}{m}\dot{\xi}=0. \tag{39.4}$$

Ecuaţia (39.4) se poate integra cu uşurinţă, rezultând soluţia

$$\xi=a\,e^{i\omega t}+b, \tag{39.5}$$

unde $\omega=\dfrac{eB}{m}$, iar $a=a_x+ia_y$ şi $b=b_x+ib_y$ sunt două constante (de asemenea, complexe) arbitrare de integrare. Revenind la variabilele $x(t)$ şi $y(t)$ prin separarea în relaţia (39.5) a părţii reale de cea imaginară, rezultă

$$\begin{cases} x(t)=a_x\cos\omega t-a_y\sin\omega t+b_x\,, \\ y(t)=a_x\sin\omega t+a_y\cos\omega t+b_y\,. \end{cases} \tag{39.6}$$

Cele patru constante reale, arbitrare, de integrare, a_x, a_y, b_x şi b_y pot fi determinate în mod univoc din următoarele patru condiţii iniţiale

$$\begin{cases} x(0)=0, \quad y(0)=0, \\ \dot{x}(0)=v_0, \quad \dot{y}(0)=0. \end{cases} \tag{39.7}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În urma unor calcule simple se obţin expresiile

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t \tag{39.8}$$

şi

$$y(t)=\frac{v_0}{\omega}(1-\cos\omega t)\,. \tag{39.9}$$

Se observă că relaţia

$$x^2(t)+\left[y(t)-\frac{v_0}{\omega}\right]^2=\frac{v_0^2}{\omega^2} \tag{39.10}$$

este valabilă pentru orice moment de timp, t. Acest lucru înseamnă că proiecţia traiectoriei electronului în planul xOy (adică perpendicular pe direcţia comună a celor două câmpuri) este un cerc.

Acest cerc are raza constantă, $R=v_0/\omega$ şi centrul în punctul de coordonate $C(x_0,\,y_0)=C\left(0,\,\frac{v_0}{\omega}\right)$.

Pe de altă parte

$$\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)=v_0^2\,,$$

adică mişcarea de rotaţie în jurul câmpului este uniformă. Viteza ei unghiulară este

$$\frac{v_0}{R}=\frac{v_0}{v_0/\omega}=\omega=\frac{eB}{m}\,.$$

Mişcarea completă a electronului rezultă prin compunerea rotaţiei uniforme dată de relaţiile (39.8) şi (39.9), cu translaţia uniform accelerată dată de relaţia (39.3). Traiectoria este aşadar o elice cu pas variabil, înfăşurată pe cilindrul circular de rază R.

Problema nr. 40

Să se determine mişcarea unui electron într-un câmp electromagnetic static şi uniform, în care vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ nu sunt paraleli, presupunând că viteza iniţială, $\vec{v}_0$, a electronului este perpendiculară pe planul format de cei doi vectori.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

Ecuația de mișcare a unui electron cu sarcina electrică $(-e)$ în câmpul electromagnetic static și uniform $\left(\vec{E},\ \vec{B}\right)$ este

$$m\ddot{\vec{r}} = -e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right). \tag{40.1}$$

Fără a restrânge generalitatea problemei, vom considera axa Oz în lungul câmpului magnetic și planul yOz ca fiind planul determinat de vectorii $\vec{E}$ și $\vec{B}$ [adică, $\vec{E} = \left(0,\ E_y,\ E_z\right)$ și $\vec{B} = \left(0,\ 0,\ B\right)$]. Atunci, enunțul problemei cere ca $\vec{v}_0 = \left(v_0,\ 0,\ 0\right)$. Întrucât

$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = \dot{y}B\vec{i} - \dot{x}B\vec{j},$$

în proiecție pe cele trei axe de coordonate, ecuația de mișcare (40.1) se va scrie astfel

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -eB\dot{y}, \\ m\ddot{y} = -eE_y + eB\dot{x}, \\ m\ddot{z} = -eE_z. \end{cases} \tag{40.2}$$

Considerând că la momentul inițial electronul se află în originea reperului și având în vedere că viteza inițială este $\vec{v}_0 = \left(v_0,\ 0,\ 0\right)$, ultima ecuație a sistemului (40.2) conduce la

$$z(t) = -\frac{eE_z}{2m}t^2. \tag{40.3}$$

Introducând variabila complexă $\xi = x + iy$, primele două ecuații ale sistemului (40.2) pot fi „cuprinse" într-una singură

$$\ddot{\xi} - i\frac{eB}{m}\dot{\xi} = -i\frac{e}{m}E_y, \tag{40.4}$$

care este o ecuație diferențială ordinară neomogenă, de ordinul doi, cu coeficienți constanți. Soluția generală a acestei ecuații este dată de suma dintre soluția generală a ecuației omogene atașate și o soluție particulară a ecuației neomogene. Se observă că ecuația omogenă atașată ecuației

BCU IAȘI CENTRALA UNIVERSITARĂ LIBRARY

neomogene are exact aceeaşi formă cu cea din problema precedentă, astfel că soluţia ei este

$$\xi_o(t) = ae^{i\omega t} + b,$$

cu a şi b două constante complexe, iar $\omega = \frac{eB}{m}$. Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene nu poate fi căutată de forma termenului care dă neomogenitatea, deoarece ecuaţia nu conţine şi funcţia de determinat, nederivată. Din această cauză, pentru a găsi forma soluţiei particulare a ecuaţiei neomogene vom apela la metoda variaţiei constantelor. Deoarece sistemul fundamental de soluţii a ecuaţiei omogene este

$$\begin{cases} \xi_1(t) = e^{i\omega t}, \\ \xi_2(t) = 1, \end{cases}$$

conform metodei variaţiei constantelor, rezultă că soluţia generală a problemei este dată de

$$\xi(t) = e^{i\omega t}\int a'(t)dt + \int b'(t)dt,$$

unde $a'(t)$ şi $b'(t)$ sunt soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} \xi_1(t)a'(t) + \xi_2(t)b'(t) = 0, \\ \xi_1'(t)a'(t) + \xi_2'(t)b'(t) = -i\frac{e}{m}E_y, \end{cases}$$

adică a sistemului

$$\begin{cases} e^{i\omega t}a'(t) + b'(t) = 0, \\ i\omega e^{i\omega t}a'(t) = -i\frac{e}{m}E_y. \end{cases}$$

Din cea de-a doua ecuaţie a sistemului de mai sus rezultă imediat că

$$a(t) = -\frac{ieE_y}{m\omega^2}e^{-i\omega t} + c,$$

unde c este o constantă veritabilă complexă şi arbitrară de integrare, iar din prima ecuaţie a aceluiaşi sistem urmează că

$$b(t) = \frac{eE_y t}{m\omega} + d,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde d este, de asemenea, o constantă complexă veritabilă şi arbitrară de integrare. Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei (40.4) este

$$\xi(t)=ce^{i\omega t}-\frac{ieE_y}{m\omega^2}+\frac{eE_y}{m\omega}t+d=ce^{i\omega t}+\frac{eE_y}{m\omega}t+g=ce^{i\omega t}+\frac{E_y}{B}t+g\,, \tag{40.5}$$

unde g este o nouă constantă veritabilă complexă, a cărei expresie (în funcţie de d şi celelalte constante care apar în problemă) poate fi gasită cu uşurinţă.

Separând în (40.5) partea reală şi cea imaginară, găsim

$$\begin{cases} x(t)=c_x\cos\omega t-c_y\sin\omega t+\dfrac{E_y}{B}t+g_x, \\ y(t)=c_x\sin\omega t+c_y\cos\omega t+g_y. \end{cases} \tag{40.6}$$

Condiţiile iniţiale

$$\begin{cases} x(0)=0, \quad y(0)=0, \\ \dot{x}(0)=v_0, \quad \dot{y}(0)=0, \end{cases} \tag{40.7}$$

conduc la

$$\begin{cases} c_x+g_x=0\,; & c_y+g_y=0\,; \\ -c_y\omega+\dfrac{E_y}{B}=v_0\,; & c_x\omega=0\,, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} c_x=0\,; & g_x=0\,; \\ c_y=\dfrac{E_y}{\omega B}-\dfrac{v_0}{\omega}\,; & g_y=\dfrac{v_0}{\omega}-\dfrac{E_y}{\omega B}\,, \end{cases}$$

astfel că (40.6) se scrie

$$\begin{cases} x(t)=\alpha\sin\omega t+\dfrac{E_y}{B}t, \\ y(t)=\alpha\left(1-\cos\omega t\right), \end{cases} \tag{40.8}$$

unde $\alpha=\dfrac{v_0}{\omega}-\dfrac{E_y}{\omega B}$. Introducând o nouă notaţie prin: $\alpha=\alpha_0\dfrac{E_y}{\omega B}$, cu $\alpha_0=\dfrac{B}{E_y}\left(v_0-\dfrac{E_y}{B}\right)$, (40.8) devine

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{E_y}{\omega B}\left(\omega t + \alpha_0 \sin \omega t\right), \\ y(t) = \alpha_0 \dfrac{E_y}{\omega B}\left(1 - \cos \omega t\right). \end{cases} \tag{40.9}$$

Ecuaţiile parametrice ale traiectoriei sunt aşadar

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{E_y}{\omega B}\left(\omega t + \alpha_0 \sin \omega t\right), \\ y(t) = \alpha_0 \dfrac{E_y}{\omega B}\left(1 - \cos \omega t\right), \\ z(t) = -\dfrac{eE_z}{2m} t^2. \end{cases} \tag{40.10}$$

Un exemplu de traiectorie determinată de ecuaţiile parametrice (40.10), pentru valorile numerice[1] precizate mai jos, este reprezentat în figura 40.

$v_0 = 10\text{^}9;$

$B = 10\text{^}-3;$

$E_y = 10\text{^}-4;$

$E_z = 5*10\text{^}-7;$

$\alpha_0 = \dfrac{v_0 * B}{E_y} - 1;$

$\omega = 10\text{^}8;$

$e = -1.6*10\text{^}-19;$

$m = 9.1*10\text{^}-31;$

$x[t_] := \dfrac{E_y}{\omega * B} * (\omega * t + \alpha_0 * \mathrm{Sin}[\omega * t]);$

$y[t_] := \alpha_0 * \dfrac{E_y}{\omega * B} * (1 - \mathrm{Cos}[\omega * t]);$

$z[t_] := -\dfrac{e * E_z}{2 * m} * t\text{^}2;$

$ParametricPlot3D[\{x[t], y[t], z[t]\}, \{t, 0, 0.02\}]$

[1] Toate mărimile sunt exprimate în unităţi SI.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

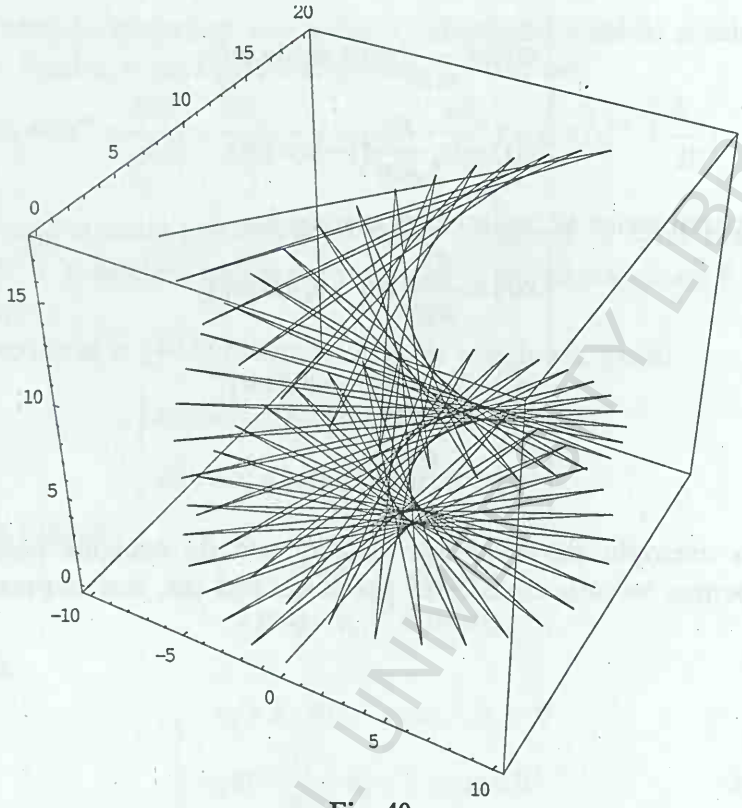


Fig. 40

Problema nr. 41

O particulă încărcată se mişcă într-un câmp electromagnetic variabil, descris de potenţialele $V(x,y,z,t)$ şi $\vec{A}(x,y,z,t)$. Să se arate că ecuaţiile de mişcare ale particulei se pot pune sub formă lagrangeană şi să se găsească expresia funcţiei Lagrange, L, neglijând efectele relativiste.

Rezolvare

Fie m masa şi q sarcina electrică a particulei ce se deplasează cu viteza $\vec{v}$ în câmpul electromagnetic exterior $\left(\vec{E},\ \vec{B}\right)$. Întrucât

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{E} = -grad\ V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{41.1}$$

şi

$$\vec{B} = rot\ \vec{A}, \tag{41.2}$$

ecuaţia de mişcare a particulei

$$m\ddot{\vec{r}} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{41.3}$$

se scrie

$$m\ddot{\vec{r}} = q\left(-grad\ V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \times rot\ \vec{A}\right). \tag{41.4}$$

Ultimul termen din relaţia (41.4) se poate transforma astfel

$$\vec{v} \times rot\ \vec{A} = \varepsilon_{ijk} v_j \left(\nabla \times \vec{A}\right)_k \vec{u}_i = \varepsilon_{ijk} v_j \varepsilon_{klm} \left(\partial_l A_m\right) \vec{u}_i = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} v_j \left(\partial_l A_m\right) \vec{u}_i =$$

$$\varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} v_j \left(\partial_l A_m\right) \vec{u}_i = \left(\delta_{il}\,\delta_{jm} - \delta_{im}\,\delta_{jl}\right) v_j \left(\partial_l A_m\right) \vec{u}_i = \left(\partial_i A_j\right) v_j \vec{u}_i -$$

$$v_j \left(\partial_j A_i\right) \vec{u}_i = \partial_i \left(v_j A_j\right) \vec{u}_i - \left(v_j \partial_j\right)\left(A_i \vec{u}_i\right) = \partial_i \left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right) \vec{u}_i - \left(\vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{A} =$$

$$\nabla\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{A},$$

unde am făcut uz de faptul că, în cadrul formalismului lagrangean, coordonatele generalizate [în cazul de faţă, coordonatele carteziene, $x_i,\ \left(i = \overline{1,3}\right)$] şi vitezele generalizate [în acest caz, vitezele „obişnuite", $v_i,\ \left(i = \overline{1,3}\right)$] sunt variabile independente, ceea ce ne-a permis introducerea vitezelor v_j sub semnul derivatelor în raport cu coordonatele, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. În plus, am introdus şi versorii $\vec{u}_i$ sub semnul derivatei, deoarece $\vec{u}_i = const.$

Astfel, ecuaţia (41.4) devine

$$m\ddot{\vec{r}} = q\left[-grad\ V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla\left(\vec{v} \cdot \vec{A}\right) - \left(\vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{A}\right] = q\left[-\nabla\left(V - \vec{v} \cdot \vec{A}\right) - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \nabla\right) \vec{A}\right)\right] = -q\left[\nabla\left(V - \vec{v} \cdot \vec{A}\right) + \frac{d\vec{A}}{dt}\right], \tag{41.5}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde am avut în vedere că $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}=\frac{d\vec{A}}{dt}$. Deoarece $\ddot{\vec{r}}=\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt}=\frac{d\vec{v}}{dt}$, ecuația (41.5) se mai poate scrie

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}+q\vec{A}\right)-\nabla\left\{q\left[-V+\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right]\right\}=0, \tag{41.6}$$

care, comparată cu ecuațiile Lagrange de speța a II-a (în scriere formală)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=0, \tag{41.7}$$

conduc, prin identificare, la

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}=m\vec{v}+q\vec{A} \tag{41.8}$$

și

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=\nabla\left\{q\left[-V+\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right]\right\}=\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left\{q\left[-V+\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right]\right\}, \tag{41.9}$$

unde L este funcția Lagrange. Mai sus, $\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$ desemnează (în scriere formală) vectorul de componente $\left(\frac{\partial L}{\partial v_x}, \frac{\partial L}{\partial v_y}, \frac{\partial L}{\partial v_z}\right)$, adică „gradientul" în raport cu viteza, iar $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=\left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}\right)$ este scrierea formală a gradientului propriu-zis al funcției Lagrange.

Atunci, ecuația (41.9) arată că

$$L(\vec{r},\ \vec{v},\ t)=-qV+q\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)+f(\vec{v}),$$

unde $f(\vec{v})$ este o funcție arbitrară, cel puțin de clasă C^0, pe care o putem determina din (41.8)

$$\frac{df}{d\vec{v}}=m\vec{v} \ \Rightarrow\ f(\vec{v})=\frac{1}{2}m\vec{v}^2,$$

astfel că funcția Lagrange capătă forma

$$L(\vec{r},\ \vec{v},\ t)=-qV+q\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right)+\frac{m\vec{v}^2}{2}. \tag{41.10}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Aşadar, ecuaţia de mişcare (41.3) poate fi pusă sub formă lagrangeană

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \vec{r}}=0,$$

cu L dat de (41.10), deşi forţa depinde de viteză. În acest caz se vorbeşte despre aşa-numitul „potenţial generalizat" sau „potenţial depinzând de viteze", $U(\vec{r},\ \vec{v},\ t)$, a cărui expresie este, evident,

$$U(\vec{r},\ \vec{v},\ t)=T(\vec{r},\ \vec{v},\ t)-L(\vec{r},\ \vec{v},\ t)=qV-q\left(\vec{v}\cdot\vec{A}\right),$$

unde $T(\vec{r},\ \vec{v},\ t)$ este expresia cea mai generală a energiei cinetice (care, în cazul de faţă este binecunoscuta expresie $\frac{1}{2}m\vec{v}^2$).

Este cunoscut faptul că potenţialele electrodinamice nu sunt definite de o manieră univocă, ci până la o transformare numită „de etalon" şi devine astfel interesant de văzut ce se întâmplă cu funcţia lui Lagrange la o asemenea transformare.

Ne propunem deci să determinăm noua funcţie a lui Lagrange, $L'\left(V',\ \vec{A}'\right)$, unde

$$V'=V-\dot{\phi},\quad \vec{A}'=\vec{A}+\nabla\phi,$$

cu $\phi=\phi(\vec{r},\ t)$ – o funcţie de variabilele spaţio-temporale, de clasă C^1 pe domeniul ei de definiţie.

Avem

$$L'=-qV'+q\left(\vec{v}\cdot\vec{A}'\right)+\frac{mv^2}{2}=-q\left(V-\dot{\phi}\right)+q\vec{v}\cdot\left(\vec{A}+\nabla\phi\right)+\frac{mv^2}{2}=$$

$$L+q\dot{\phi}+q\vec{v}\cdot\nabla\phi=L+q\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\phi\right]=L+q\frac{d\phi}{dt}=L+\frac{d}{dt}(q\phi),$$

adică, cei doi lagrangeeni sunt echivalenţi (conduc la aceeaşi ecuaţie diferenţială de mişcare), deoarece ei diferă doar printr-un termen care este derivata totală în raport cu timpul a unei funcţii arbitrare $\phi=\phi(\vec{r},\ t)$ care depinde de coordonate şi de timp.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 42

Să se determine ecuaţia de mişcare a unei particule cu sarcina electrică e, care se deplasează în câmpul electromagnetic $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$, utilizând formalismul lagrangean.

Rezolvare

În cadrul formalismului lagrangean, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării unei particule cu sarcina electrică e în câmpul electromagnetic $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ se scriu sub forma

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q^k}=Q_k \ . \tag{42.1}$$

unde, numărul valorilor pe care le poate lua indicele k este egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului (particulei).

Considerând că forţa activă (aplicată), $\vec{F}$, provine dintr-un potenţial generalizat de forma

$$U\left(q^j,\dot{q}^j,t\right)=C_j\,\dot{q}^j+U_0=U_1+U_0\,,\ \left(j=\overline{1,n}\right),$$

în care, pe lângă coordonatele generalizate q^j, intervin explicit şi vitezele generalizate $\dot{q}^j$, iar funcţiile $C_j\left(q^j,\,t\right)$ depind doar de coordonatele generalizate q^j şi de timp, şi adunând în ambii membri ai relaţiei (42.1) expresia

$$\frac{\partial U}{\partial q^k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^k}\right),$$

obţinem

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}^k}\right]-\frac{\partial (T-U)}{\partial q^k}=Q_k-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^k}\right)+\frac{\partial U}{\partial q^k}\,, \tag{42.2}$$

şi dacă în plus considerăm că forţele generalizate Q_k sunt date de

$$Q_k=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^k}\right)-\frac{\partial U}{\partial q^k}\,, \tag{42.3}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

atunci ecuaţiile (42.2) capătă forma binecunoscută a ecuaţiilor Lagrange de speţa a doua pentru un sistem natural

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^k}=0,$$

în care funcţia Lagrange este dată de expresia

$$L\left(q^k,\dot{q}^k,t\right)=T\left(q^k,\dot{q}^k,t\right)-U\left(q^k,\dot{q}^k,t\right). \qquad (42.4)$$

Funcţia $U\left(q^k,\dot{q}^k,t\right)$ se numeşte *potenţial generalizat*, sau *potenţial depinzând de viteze*.

Pentru a stabili ecuaţia diferenţială a mişcării unei particule cu sarcina electrică e, care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ în câmpul electromagnetic caracterizat de vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$, trebuie să deducem mai întâi expresia funcţiei lui Lagrange pentru acest sistem.

Particula fiind liberă, are trei grade de libertate (corespunzătoare mişcării de translaţie) şi putem considera drept coordonate generalizate, chiar coordonatele carteziene, $q^i=x_i$. Atunci, vitezele generalizate vor fi vitezele „obişnuite", $\dot{q}^i\equiv\dot{x}_i=v_i$, $(i=\overline{1,3})$, iar la efectuarea calculelor va trebui să ţinem cont că, în conformitate cu teoria aferentă formalismului ecuaţiilor Lagrange de speţa a doua, aceste variabile (x_i şi $\dot{x}_i=v_i$) sunt independente.

În absenţa câmpului magnetic, lagrangeeanul este simplu, $L=T-U=T-eV$, unde $V(\vec{r},\,t)$ este potenţialul câmpului electric. Pentru a lua în consideraţie şi contribuţia câmpului magnetic la expresia lagrangeeanului, vom apela la proprietatea funcţiei lui Lagrange de a fi un invariant; prin urmare, potenţialul vector $\vec{A}(\vec{r},\,t)$ nu poate să apară în expresia lui L decât înmulţit scalar cu un alt vector. Există trei posibilităţi: $\vec{A}\cdot\vec{A}$, $\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}$ şi $\vec{A}\cdot\ddot{\vec{r}}$. Deoarece în ecuaţia de mişcare nu apare $\vec{B}^2$, prima variantă este exclusă. În cel de-al treilea caz, am avea un termen conţinând derivata acceleraţiei, ceea ce, de asemenea, nu este posibil (aşa cum este înţeleasă fizica în prezent, ecuaţiile de mişcare „obişnuite" sunt ecuaţii diferenţiale de ordinul doi şi nu de ordinul trei, patru etc.). Prin urmare, rămâne varianta a doua, iar expresia lagrangeeanului va fi

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$L=\frac{1}{2}mv^2-eV+e\,\vec{A}\cdot\dot{\vec{r}}=\frac{1}{2}mv^2-eV+e\,\vec{A}\cdot\vec{v}\ . \tag{42.5}$$

Avem

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\equiv\frac{\partial L}{\partial v^i}=mv_i+eA_i,$$

şi atunci

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)\equiv\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)=m\ddot{x}_i+e\left(\frac{\partial A_i}{\partial t}+\dot{x}_k\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right),$$

unde am ţinut cont de faptul că $\vec{A}(\vec{r},\,t)$ depinde de timp atât explicit, cât şi implicit, prin intermediul coordonatelor spaţiale. Apoi

$$\frac{\partial L}{\partial q^i}\equiv\frac{\partial L}{\partial x_i}=-\frac{\partial V}{\partial x_i}+ev_k\frac{\partial A_k}{\partial x_i}\quad(i,\,k=1,2,3),$$

astfel că ecuaţiile Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}=0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0,$$

conduc la

$$m\ddot{x}_i=e\left(-\frac{\partial A_i}{\partial t}-\frac{\partial V}{\partial x_i}\right)+ev_k\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right), \tag{42.6}$$

sau

$$m\ddot{x}_i=eE_i+ev_k\underbrace{\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)}_{\substack{not.\\=T_{ik}=-T_{ki}}}=eE_i+ev_k\varepsilon_{ikj}B_j=eE_i-e\varepsilon_{ijk}B_jv_k=$$

$$eE_i-e\left(\vec{B}\times\vec{v}\right)_i=eE_i+e\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)_i, \tag{42.7}$$

unde B_j sunt componentele pseudovectorului asociat tensorului antisimetric de ordinul al doilea $T_{ik}\equiv\dfrac{\partial A_k}{\partial x_i}-\dfrac{\partial A_i}{\partial x_k}$. Conform izomorfismului dintre mulţimea tensorilor antisimetrici de ordinul al doilea, definiţi pe un spaţiu cu trei dimensiuni şi mulţimea pseudovectorilor asociaţi, avem

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$B_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jik}T_{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon_{jik}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{jik}\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\varepsilon_{jik}\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{jik}\frac{\partial A_k}{\partial x_i} -$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{jki}\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\varepsilon_{jik}\frac{\partial A_k}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\varepsilon_{jik}\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{jik}\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \varepsilon_{jik}\partial_i A_k = \left(rot\,\vec{A}\right)_j,$$

adică, pseudovectorul (vectorul axial) ale cărui componente sunt B_j, nu este altul decât inducţia câmpului magnetic (ceea ce şi justifică notarea lui, încă de la început, cu litera B).

Sub formă vectorială, relaţia (42.7) se scrie astfel

$$m\ddot{\vec{r}} = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right),$$

care este binecunoscuta ecuaţie de mişcare a unei particule de masă m şi sarcină electrică e, care, conform principiului al doilea al dinamicii, exprimă faptul că produsul dintre masa şi acceleraţia particulei este egal cu forţa rezultantă care acţionează asupra particulei (forţa datorată componentei electrice a câmpului electromagnetic, $\vec{F}_e = e\vec{E}$ plus cea corespunzătoare componentei magnetice a câmpului, care este forţa Lorentz, $\vec{F}_L = e\,\vec{v}\times\vec{B}$).

Problema nr. 43

Să se determine ecuaţia de mişcare a unei particule cu sarcina electrică e, care se deplasează în câmpul electromagnetic $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$, utilizând formalismul hamiltonian.

Rezolvare

Lagrangeanul unei particule de masă m şi sarcină electrică e, care se mişcă într-un câmp electromagnetic exterior $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ se scrie astfel

$$L = \frac{1}{2}m\,v_j v_j - eV + e v_j A_j \quad \left(j = \overline{1,3}\right), \tag{43.1}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $V=V(\vec{r},\,t)$ şi $\vec{A}=\vec{A}(\vec{r},\,t)$ sunt potenţialele câmpului, iar x_j şi p_j sunt coordonatele generalizate şi respectiv, impulsurile generalizate asociate sistemului studiat. Conform reţetei hamiltoniene de rezolvare a unei probleme, primul pas este determinarea funcţiei lui Hamilton a sistemului (a hamiltonianului sistemului). În cazul nostru, acesta este

$$H=p_jv_j-L=\frac{1}{2}mv_jv_j+eV\,, \tag{43.2}$$

căci, aşa cum se ştie, $p_j=\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}^j}=\dfrac{\partial L}{\partial v_j}=mv_j+eA_j$, $\left(j=\overline{1,3}\right)$. După cum se poate observa cu uşurinţă, drept coordonate generalizate şi respectiv viteze generalizate au fost alese coordonatele carteziene şi respectiv vitezele „obişnuite" asociate, deoarece particula este liberă.

Pentru a putea utiliza formalismul hamiltonian, este obligatoriu ca funcţia lui Hamilton să fie exprimată în coordonatele canonice, $\left(q_j,p_j\right)\equiv\left(x_j,p_j\right)$. Din $p_j=mv_j+eA_j$, rezultă că $v_j=\dfrac{1}{m}\left(p_j-eA_j\right)$, şi atunci, hamiltonianul sistemului [dat de relaţia (43.2)] devine

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_j-eA_j\right)\left(p_j-eA_j\right)+eV\,. \tag{43.3}$$

Ecuaţia de mişcare a particulei se poate obţine în cadrul acestui formalism din ecuaţiile canonice (ecuaţiile lui Hamilton)

$$\begin{cases}\dot{q}_k=\dfrac{\partial H}{\partial p_k},\\ \dot{p}_k=-\dfrac{\partial H}{\partial q_k},\ \left(k=\overline{1,3}\right).\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dot{x}_k=\dfrac{\partial H}{\partial p_k},\\ \dot{p}_k=-\dfrac{\partial H}{\partial x_k},\ \left(k=\overline{1,3}\right).\end{cases}$$

Cu ajutorul lui (43.3) acest sistem capătă forma

$$\begin{cases}\dot{x}_k=\dfrac{1}{m}\left(p_k-eA_k\right),\\ \dot{p}_k=\dfrac{e}{m}\left(p_j-eA_j\right)\dfrac{\partial A_j}{\partial x_k}-e\dfrac{\partial V}{\partial x_k}.\end{cases}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Derivând total în raport cu timpul prima ecuaţie a sistemului şi introducând pe $\dot{p}_k$ (ce apare în urma derivării în membrul drept al ecuaţiei) din cea de-a doua ecuaţie a sistemului, obţinem

$$\ddot{x}_k = \frac{1}{m}\left[\frac{e}{m}\left(p_j - eA_j\right)\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - e\frac{\partial V}{\partial x_k} - e\dot{A}_k\right] = \frac{1}{m}\left(\frac{e}{m} m\,\dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_k} - e\frac{\partial V}{\partial x_k} - e\dot{A}_k\right) =$$

$$\frac{1}{m}\left[e\,\dot{x}_j\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - e\frac{\partial V}{\partial x_k} - e\left(\frac{\partial A_k}{\partial t} + \dot{x}_j\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\right)\right], \tag{43.4}$$

unde am folosit încă o dată prima ecuaţie a sistemului şi am ţinut cont de faptul că, întrucât $A_k = A_k(\vec{r}, t)$, avem

$$\dot{A}_k = \frac{\partial A_k}{\partial t} + \dot{x}_j\frac{\partial A_k}{\partial x_j},$$

În urma rearanjării unor termeni, relaţia (43.4) devine

$$m\ddot{x}_k = -e\frac{\partial V}{\partial x_k} - e\frac{\partial A_k}{\partial t} + ev_j\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j}\right). \tag{43.5}$$

Dar, cantitatea $\dfrac{\partial A_j}{\partial x_k} - \dfrac{\partial A_k}{\partial x_j}$ este tensorul antisimetric de ordinul al doilea T_{kj} (vezi problema precedentă) căruia, fiind definit pe un spaţiu cu trei dimensiuni, îi corespunde un pseudovector de componente

$$B_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}T_{kj} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\frac{\partial A_j}{\partial x_k} -$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial A_j}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\frac{\partial A_j}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ikj}\frac{\partial A_j}{\partial x_k} = \varepsilon_{ikj}\frac{\partial A_j}{\partial x_k} = \varepsilon_{ikj}\partial_k A_j = \left(rot\,\vec{A}\right)_i,$$

adică, exact vectorul axial al inducţiei magnetice a câmpului. În aceste condiţii, conform izomorfismului dintre mulţimea tensorilor antisimetrici de ordinul doi definiţi pe un spaţiu cu trei dimensiuni şi mulţimea de pseudovectori asociaţi, avem

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \equiv T_{kj} = \varepsilon_{kji}B_i,$$

BCU "ALEXANDRU IOAN CUZA" UNIVERSITY LIBRARY

iar (43.5) devine

$$m\ddot{x}_k = -e\frac{\partial V}{\partial x_k} - e\frac{\partial A_k}{\partial t} + ev_j\varepsilon_{kji}B_i = e\left(-\frac{\partial V}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial t}\right) + e\varepsilon_{kji}v_jB_i = eE_k +$$

$$e\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)_k = e\left[E_k + \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)_k\right],$$

care este proiecția pe axa Ox_k a ecuației vectoriale

$$m\ddot{\vec{r}} = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right),$$

adică a ecuației de mișcare căutate.

Problema nr. 44

Fie N_0 densitatea electronilor unui material dielectric anizotrop. Să se determine tensorul permitivității dielectrice relative a dielectricului, $(\varepsilon_r)_{ik}$ $\left(i,k=\overline{1,3}\right)$, dacă acesta este plasat într-un câmp magnetic static şi omogen de inducție magnetică B_0, admițând modelul legăturii elastice/armonice a electronilor şi ionilor în material. Pentru simplitate, se va considera că toți electronii au aceeaşi frecvență proprie de oscilație, iar efectele relativiste şi radiația de frânare se vor neglija.

Rezolvare

Fără a restrânge generalitatea problemei, să alegem axa Oz de-a lungul câmpului magnetic $\vec{B}_0$. Ecuația de mişcare a unui electron în câmpul cu componenta electrică monocromatică având frecvența $\nu(=\omega/2\pi)$ este

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2\vec{r} + e\vec{E} + e\,\vec{v}\times\vec{B}_0 = -m\omega_0^2\vec{r} + e\vec{E}_0e^{-i\omega t} + e\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{B}_0, \quad (44.1)$$

unde $\vec{r}$ reprezintă deplasarea electronului față de poziția lui de echilibru, m este masa electronului, iar $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ este frecvența mişcării oscilatorii

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a electronilor în material (forţa de revenire este $\vec{F} = -m\omega_0^2 \vec{r}$). Dezvoltând produsul vectorial, ecuaţia (44.1) se rescrie astfel

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2\vec{r} + e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} + e\frac{dy}{dt}B_0\hat{i} - e\frac{dx}{dt}B_0\hat{j}, \qquad (44.2)$$

unde $\hat{i}$ şi $\hat{j}$ sunt versorii axelor de coordonate Ox şi respectiv Oy. Pe componente, ecuaţia (44.2) se scrie

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x + eE_{0x}e^{-i\omega t} + e\frac{dy}{dt}B_0 = -m\omega_0^2 x + eE_x + e\frac{dy}{dt}B_0, \quad (44.2.a)$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -m\omega_0^2 y + eE_{0y}e^{-i\omega t} - e\frac{dx}{dt}B_0 = -m\omega_0^2 y + eE_y - e\frac{dx}{dt}B_0, \quad (44.2.b)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -m\omega_0^2 z + eE_{0z}e^{-i\omega t} = -m\omega_0^2 z + eE_z. \qquad (44.2.c)$$

Pentru uşurarea calculelor, să introducem perechea de coordonate „ciclice" $\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)$, $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy)$, în planul perpendicular pe direcţia câmpului magnetic permanent $\vec{B}_0 = B_0\hat{k}$, unde $\hat{k}$ este versorul axei Oz.

Să rescriem acum ecuaţiile (44.2) în noile coordonate, ξ, η şi z. Pentru a determina ecuaţia în variabila ξ, înmulţim ecuaţia (44.2.a) cu $-1/\sqrt{2}$ şi ecuaţia (44.2.b) cu numărul complex $-i/\sqrt{2}$ şi apoi le adunăm membru cu membru. Obţinem

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)\right] = -m\omega_0^2\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)\right] + e\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(E_x+iE_y)\right] - ieB_0\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)\right],$$

sau, având în vedere că $\xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy)$

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2} = -m\omega_0^2\xi + eE_+ - ieB_0\frac{d\xi}{dt},$$

iar de aici

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+2i\,\Omega\frac{d\xi}{dt}+\omega_0^2\xi=\frac{e}{m}E_+, \qquad (44.3.a)$$

unde s-au folosit notațiile $\Omega\equiv\frac{eB_0}{2m}$ și $E_+=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_x+iE_y\right)$.

Ecuația în variabila η se poate obține în mod analog: se înmulțește ecuația (44.2.a) cu $1/\sqrt{2}$ și ecuația (44.2.b) cu numărul complex $-i/\sqrt{2}$ și apoi se adună membru cu membru ecuațiile astfel obținute. Se găsește

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy)\right]=-m\omega_0^2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy)\right]+e\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_x-iE_y\right)\right]+$$
$$ieB_0\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy)\right],$$

care, ținând cont că $\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy)$, devine

$$m\frac{d^2\eta}{dt^2}=-m\omega_0^2\eta+eE_-+ieB_0\frac{d\eta}{dt},$$

sau

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}-2i\,\Omega\frac{d\eta}{dt}+\omega_0^2\eta=\frac{e}{m}E_-, \qquad (44.3.b)$$

unde s-a utilizat notația $E_-=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(E_x-iE_y\right)$.

Deoarece variabila z rămâne neschimbată, iar ecuația (44.2.c) conține doar variabila z, această ecuație își păstrează forma

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\omega_0^2z=\frac{e}{m}E_z. \qquad (44.3.c)$$

Întrucât variabila temporală intervine doar prin intermediul exponențialei $e^{-i\omega t}$, operația de derivare totală în raport cu timpul este echivalentă înmulțirii cu $-i\omega$, adică

$$\frac{d\bullet}{dt}=-i\omega\bullet.$$

Având în vedere acest lucru, ecuațiile (44.3) devin

$$-\omega^2\xi+2\Omega\omega\xi+\omega_0^2\xi=\frac{e}{m}E_+,$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-\omega^2\eta - 2\Omega\omega\eta + \omega_0^2\eta = \frac{e}{m}E_-,$$

$$-\omega^2 z + \omega_0^2 z = \frac{e}{m}E_z,$$

sau

$$\xi = \frac{e}{m}\frac{E_+}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\omega\Omega}, \tag{44.4.a}$$

$$\eta = \frac{e}{m}\frac{E_-}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\omega\Omega}, \tag{44.4.b}$$

$$z = \frac{e}{m}\frac{E_z}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{44.4.c}$$

Să revenim la vechile variabile x, y şi z. Pentru aceasta trebuie să avem în vedere că $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)$, $y = \frac{i}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$ şi $z = z$.

Aşadar, ecuaţia în x se obţine înmulţind ecuaţia (44.4.a) cu $-1/\sqrt{2}$ şi ecuaţia (44.4.b) cu $1/\sqrt{2}$ şi adunând membru cu membru ecuaţiile astfel obţinute. Rezultă

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) = \frac{e}{m}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{E_+}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\omega\Omega} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{E_-}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2\omega\Omega}\right] =$$

$$\frac{e}{m}\frac{(a+b)E_- - (a-b)E_+}{\sqrt{2}(a^2 - b^2)} = \frac{e}{m}\frac{(a+b)\frac{1}{\sqrt{2}}(E_x - iE_y) + (a-b)\frac{1}{\sqrt{2}}(E_x + iE_y)}{\sqrt{2}(a^2 - b^2)} =$$

$$\frac{e}{m}\frac{aE_x - ibE_y}{a^2 - b^2},$$

adică

$$x = \frac{e}{m}\frac{aE_x - ibE_y}{a^2 - b^2}, \tag{44.5.a}$$

unde s-au folosit notaţiile $a = \omega_0^2 - \omega^2$ şi $b = 2\omega\Omega$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

La rândul ei, ecuația în y poate fi obținută prin înmulțirea ecuațiilor (44.4.a) şi (44.4.b) cu același număr complex $i/\sqrt{2}$ şi adunarea membru cu membru a ecuațiilor care rezultă astfel. Se găsește

$$\frac{i}{\sqrt{2}}(\xi+\eta)=\frac{e}{m}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{E_+}{\omega_0^2-\omega^2+2\omega\Omega}+\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{E_-}{\omega_0^2-\omega^2-2\omega\Omega}\right]=\frac{e}{m}\times$$

$$\frac{(a-b)iE_+ +(a+b)iE_-}{\sqrt{2}\left(a^2-b^2\right)}=\frac{e}{m}\frac{-(a-b)\frac{i}{\sqrt{2}}\left(E_x+iE_y\right)+(a+b)\frac{i}{\sqrt{2}}\left(E_x-iE_y\right)}{\sqrt{2}\left(a^2-b^2\right)}=$$

$$\frac{e}{m}\frac{aE_y+ibE_x}{a^2-b^2},$$

sau

$$y=\frac{e}{m}\frac{aE_y+ibE_x}{a^2-b^2}. \qquad (44.5.b)$$

În fine, ecuația în variabila z rezultă direct din (44.4.c) cu notația $a=\omega_0^2-\omega^2$:

$$z=\frac{e}{m}\frac{E_z}{a}. \qquad (44.5.c)$$

În cadrul acestui model simplu de polarizare a dielectricului, momentul dipolar indus într-un singur sistem atomic/molecular este $\vec{p}=e\vec{r}$, aşadar, polarizarea electrică a mediului (momentul dipolar pe unitatea de volum) va fi $\vec{P}=N_0\vec{p}=eN_0\vec{r}$, unde N_0 este numărul de dipoli (perechi electron-ion) pe unitatea de volum (egal cu numărul de electroni din unitatea de volum). Deci, în acest model simplu, se presupune că sistemele atomice/moleculare din care este alcătuit materialul dielectric formează fiecare câte o pereche electron-ion, cu alte cuvinte, câte un „mic dipol elementar". În aceste condiții, conform definiției inducției electrice, avem

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}=\varepsilon_0\vec{E}+eN_0\vec{r},$$

sau, pe componente [având în vedere şi relațiile (44.5)],

$$D_x=\varepsilon_0E_x+eN_0x=\varepsilon_0E_x+eN_0\frac{e}{m}\frac{aE_x-ibE_y}{a^2-b^2}=$$

BCU IAŞI / CULTURA - UNIVERSITY LIBRARY

$$\left[\varepsilon_0+\frac{ae^2N_0}{m\left(a^2-b^2\right)}\right]E_x-\frac{ibe^2N_0}{m\left(a^2-b^2\right)}E_y, \tag{44.6.a}$$

$$D_y=\varepsilon_0E_y+eN_0y=\varepsilon_0E_y+eN_0\frac{e}{m}\frac{aE_y+ibE_x}{a^2-b^2}= \\ \left[\varepsilon_0+\frac{ae^2N_0}{m\left(a^2-b^2\right)}\right]E_y+\frac{ibe^2N_0}{m\left(a^2-b^2\right)}E_x \tag{44.6.b}$$

şi

$$D_z=\varepsilon_0E_z+eN_0z=\varepsilon_0E_z+eN_0\frac{e}{m}\frac{E_z}{a}=\left(\varepsilon_0+\frac{e^2N_0}{ma}\right)E_z. \tag{44.6.c}$$

Comparând relaţiile (44.6) cu relaţia tensorială generală $D_i=\varepsilon_{ik}E_k=\varepsilon_0\left(\varepsilon_r\right)_{ik}E_k$, $\left(i,k=\overline{1,3}\right)$, rezultă că tensorul permitivităţii dielectrice relative a dielectricului este

$$\left(\varepsilon_r\right)_{ik}=\begin{pmatrix}1+\dfrac{ae^2N_0}{\varepsilon_0m\left(a^2-b^2\right)} & -\dfrac{ibe^2N_0}{\varepsilon_0m\left(a^2-b^2\right)} & 0\\ \dfrac{ibe^2N_0}{\varepsilon_0m\left(a^2-b^2\right)} & 1+\dfrac{ae^2N_0}{\varepsilon_0m\left(a^2-b^2\right)} & 0\\ 0 & 0 & 1+\dfrac{e^2N_0}{\varepsilon_0ma}\end{pmatrix}, \tag{44.7}$$

unde $\varepsilon_0=8{,}854\cdot10^{-12}F\cdot m^{-1}$ este permitivitatea vidului.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

VII. MAGNETOFLUIDODINAMICĂ. PLASMĂ

Problema nr. 45

Utilizând exprimarea câmpului electromagnetic prin antipotențialele generalizate şi apelând la formalismul oferit de calculul variațional, să se stabilească ecuația de mişcare a unui fluid compresibil, nevâscos, infinit conductor ce execută o mişcare izentropă în câmpul electromagnetic $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$.

Complemente

1. După cum se cunoaşte (vezi cursul citat), câmpul electromagnetic se poate exprima cu ajutorul antipotențialelor (denumire improprie, dar tolerată) utilizând ecuațiile lui Maxwell cu surse, în lipsa acestora. Aşa cum a observat Calkin (1963), ecuația de continuitate pentru un fluid electrizat în mişcare,

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t}+\nabla\cdot\left(\vec{j}+\rho_e\vec{v}\right)=0, \tag{45.1}$$

unde ρ_e este densitatea de sarcină electrică, $\vec{v}$ viteza fluidului, iar $\rho_e\vec{v}$ densitatea curentului de convecție, este identic satisfăcută dacă alegem

$$\begin{cases}\vec{j}=\dfrac{\partial\vec{\vec{P}}}{\partial t}+\nabla\times\left(\vec{\vec{P}}\times\vec{v}\right)+\vec{v}\,\nabla\cdot\vec{\vec{P}}\,;\\ \rho_e=-\nabla\cdot\vec{\vec{P}},\end{cases} \tag{45.2}$$

unde câmpul vectorial $\vec{\vec{P}}$ se numeşte *pseudopolarizare*, iar (45.2 - 1) defineşte *derivata lorentziană* a acestuia (vezi cursul citat). Utilizând (45.2), ecuațiile cu surse ale lui Maxwell se scriu astfel

$$\begin{cases}\nabla\times\left(\dfrac{1}{\mu_0}\vec{B}-\vec{\vec{P}}\times\vec{v}\right)=\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{\vec{P}}\right);\\ \nabla\cdot\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{\vec{P}}\right)=0.\end{cases} \tag{45.3}$$

De aici deducem că există două câmpuri, unul vectorial, $\vec{M}$, şi unul scalar, ψ, astfel încât să avem

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{\vec{P}} = \nabla \times \vec{M}; \\ \dfrac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{\vec{P}} \times \vec{v} - \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial t} = \nabla \psi, \end{cases} \tag{45.4}$$

de unde

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \left(\nabla \times \vec{M} - \vec{\vec{P}} \right); \\ \vec{B} = \mu_0 \left(\nabla \psi + \vec{\vec{P}} \times \vec{v} + \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial t} \right). \end{cases} \tag{45.5}$$

Prin urmare, prin înlocuirea celor patru mărimi scalare, $\vec{j}$ şi ρ_e, (sursele) prin trei mărimi scalare, $\vec{\vec{P}}$, câmpul electromagnetic poate fi exprimat în funcţie de potenţialele $\vec{M}$ şi ψ, numite *antipotenţiale generalizate.*

2. Sub aspect termodinamic, mărimile ce intervin în descrierea magnetofluidului sunt legate prin ecuaţia de continuitate

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{45.6}$$

şi ecuaţia fundamentală a termodinamicii pentru procesele cvasistatice şi reversibile (ecuaţia entropiei)

$$T\, ds = d\varepsilon + p \nabla \left(\rho^{-1} \right), \tag{45.7}$$

unde s este entropia, iar $\varepsilon(\rho, s)$ este energia internă, ambele raportate la unitatea de masă. Întrucât fluidul execută o mişcare izentropă, (45.7) se reduce la

$$ds/dt = 0. \tag{45.8}$$

Rezolvare

Pentru deducerea ecuaţiei de mişcare vom utiliza formalismul analitic. Precum se ştie, alegerea densităţii de lagrangean nu este unică şi atunci trebuie alese relaţii care să conţină toate mărimile caracteristice (electrice şi termodinamice) pentru a compune o funcţie Lagrange corespunzătoare. În acest scop, vom apela la metoda multiplicatorilor lagrangeeni, care constă în găsirea unor ecuaţii (zero-uri) care, înmulţite cu

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

nişte parametri dependenţi de punct şi de timp, sunt introduse în „compoziţia" densităţii de lagrangean. Aplicarea principiului variaţional permite obţinerea unui set de relaţii care, prin eliminarea multiplicatorilor, conduc la ecuaţiile căutate.

Având în vedere procedeul descris mai sus, vom scrie densitatea de lagrangean sub forma

$$L=\frac{1}{2\mu_0}B^2-\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2+\frac{1}{2}\rho v^2-\rho\varepsilon-\alpha\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\vec{v}\right)-\beta\rho\frac{ds}{dt}. \quad (45.9)$$

Aici toate mărimile sunt funcţii de coordonate şi de timp, variabile pe care le vom nota prin $x_k\,(x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,\ x_4=t)$. Exprimând câmpul $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$ în funcţie de antipotenţialele $\vec{M}$ şi ψ şi alegând ca parametri variaţionali mărimile: $\vec{M}$, ψ, $\vec{P}$, $\vec{v}$, ρ şi s (notaţi generic prin σ_ν), ecuaţiile Euler-Lagrange

$$(L)_\nu=\frac{\partial L}{\partial\sigma_\nu}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial L}{\partial\sigma_{\nu,k}}\right)=0, \quad (45.10)$$

conduc la

$$\begin{cases}(L)_{\vec{M}}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}-\nabla\times\vec{E}=0;\\ (L)_{\psi}=\nabla\cdot\vec{B}=0;\\ (L)_{\vec{P}}=\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}=0;\\ (L)_{\vec{v}}=\rho\vec{v}+\vec{B}\times\vec{\vec{P}}+\rho\nabla\alpha-\beta\rho\nabla s=0;\\ (L)_{\rho}=\dfrac{1}{2}v^2-\varepsilon-\dfrac{p}{\rho}+\vec{v}\cdot\nabla\alpha+\dfrac{\partial\alpha}{\partial t}=0;\\ (L)_{s}=\vec{v}\cdot\nabla\beta+\dfrac{\partial\beta}{\partial t}-T=0.\end{cases} \quad (45.11)$$

După cum era de aşteptat, am găsit ecuaţiile lui Maxwell fără surse (45.11 – 1, 2), precum şi legea lui Ohm pentru conductivitate infinită (45.11 – 3). Relaţia (45.11 – 4) este o generalizare a reprezentării câmpului $\vec{v}$ al vitezelor în funcţie de *potenţialele Clebsh* care, în cazul nostru, sunt α, β şi s.

BCU MIHAI EMINESCU CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru a găsi ecuația de mișcare a magnetofluidului, vom elimina multiplicatorii lagrangeeni α și β din ecuațiile (45.11 – 4, 5, 6). Pentru început, vom aplica gradientul ecuației (45.11 – 5). Utilizând (45.11 – 4), avem

$$\nabla(\beta\vec{v}\cdot\nabla s)+\nabla\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)-\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)=\nabla\left[\varepsilon+\rho^{-1}p+\rho^{-1}\,\vec{v}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{\vec{P}}\right)\right]. \tag{45.12}$$

În continuare, vom utiliza (45.8) și (45.11 – 6), precum și cunoscuta relație vectorială (vezi Anexa B)

$$\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\times\left(\nabla\times\vec{b}\right)+\vec{b}\times(\nabla\times\vec{a})+(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}+\left(\vec{b}\cdot\nabla\right)\vec{a}.$$

Găsim atunci:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\rho^{-1}\,\nabla p+\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho^{-1}\vec{B}\times\vec{\vec{P}}\right)+\vec{v}\times\left[\nabla\times\left(\rho^{-1}\vec{B}\times\vec{\vec{P}}\right)\right]+\nabla\left[\rho^{-1}\,\vec{v}\cdot\left(\vec{\vec{P}}\times\vec{B}\right)\right]. \tag{45.13}$$

Dacă, acum, folosim identitatea vectorială

$$\nabla\left[\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right]=\vec{A}\times\left[\nabla\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\right]+\vec{B}\times\left[\nabla\times\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\right]+\vec{C}\times\left[\nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\right]-\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\nabla\cdot\vec{C}-\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)\nabla\cdot\vec{A}-\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)\nabla\cdot\vec{B},$$

observăm că unii termeni dispar și (45.13) conduce la ecuația căutată

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right]=-\nabla p+\vec{j}\times\vec{B}. \tag{45.14}$$

Problema nr. 46

Ecuația de mișcare pentru o plasmă electronică, incluzând un termen fenomenologic de ciocnire, dar neglijându-se presiunea hidrostatică (aproximația de ordin zero) este

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=\frac{e}{m}\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)-\nu\vec{v},$$

unde ν este frecvența ciocnirilor.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

a) Arătaţi că în prezenţa câmpurilor externe electric şi magnetic, statice şi uniforme, expresia liniarizată, staţionară a legii lui Ohm devine

$$J_i = \lambda_{ij} E_j \quad \left(i, j = \overline{1,3}\right),$$

unde tensorul conductivităţii λ_{ij} este

$$\lambda_{ij} = \frac{\omega_p^2}{\nu\left(1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\omega_B}{\nu} & 0 \\ -\frac{\omega_B}{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2} \end{pmatrix},$$

în care ω_p este pulsaţia plasmei electronice, ω_B este pulsaţia precesiei Larmor, iar direcţia lui $\vec{B}$ este aleasă ca fiind axa Oz;

b) Presupunând că la momentul $t=0$ este aplicat brusc un câmp electric $\vec{E}$ în direcţia axei Ox, suplimentar faţă de câmpul magnetic de inducţie $\vec{B}$ orientat după axa Oz şi că la $t=0$, curentul este zero, să se găsească expresiile pentru componentele curentului în funcţie de timp, incluzând comportarea tranzitorie.

Rezolvare

a) Sistemul fundamental de ecuaţii ale magnetofluidodinamicii este alcătuit din următoarele ecuaţii:

- ecuaţiile care descriu câmpul electromagnetic;
- ecuaţiile de continuitate (pentru componenta mecanică şi cea electrică);
- ecuaţia forţei (ecuaţia de mişcare);
- legea lui Ohm;
- ecuaţia de stare,

şi se scrie astfel

BCU IASI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\vec{B}=\mu\vec{J},\quad \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{1}{\varepsilon}\rho_e,\quad \nabla\cdot\vec{B}=0\,; \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0,\quad \dfrac{\partial\rho_e}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_e\vec{v})=0\,; \\ \rho\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\rho\vec{F}-\nabla p+(\xi+\eta)\nabla(\nabla\cdot\vec{v})+\eta\Delta\vec{v}+\vec{J}\times\vec{B}\,; \\ \rho T\dfrac{ds}{dt}=T_{ik}'\dfrac{\partial v_i}{\partial x_k}+\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\chi\dfrac{\partial T}{\partial x_k}\right)+\vec{J}\cdot\vec{E}\,; \\ \vec{J}=\vec{J}\left(\vec{E},\vec{B}\right)\,; \\ f(p,\rho,T)=0\,, \end{cases} \tag{46.1}$$

unde $\vec{F}$ este forţa masică specifică de natură neelectromagnetică, ξ şi η sunt coeficienţii de vâscozitate dinamică ai fluidului newtonian, T este temperatura absolută, T_{ik}' este tensorul tensiunilor vâscoase, χ este coeficientul de termoconducţie, s este entropia unităţii de masă, iar p este presiunea. Pentru un fluid conductor simplu, monocomponent şi nerelativist, legea lui Ohm ia forma: $\vec{J}=\lambda\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$, unde λ este conductivitatea fluidului conductor, iar dacă mişcarea este izentropă, atunci ecuaţia de stare se scrie simplu: $ds/dt=0$.

În diverse cazuri particulare, sistemul (46.1) ia tot atâtea forme, cea mai simplă dintre acestea corespunzând unui fluid perfect ($\xi=0,\ \eta=0$), infinit conductor ($\lambda\to\infty$), care execută o mişcare izentropă ($ds/dt=0$).

Pentru a determina cerinţa punctului a) al problemei de faţă (determinarea formei liniarizate staţionare a legii lui Ohm), în sistemul de ecuaţii de mai sus se poate renunţa la ecuaţiile patru, cinci (care, de altfel este şi necunoscuta problemei) şi şase, acesta căpătând forma mult mai simplă

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},\ \nabla\times\vec{B}=\mu\vec{J},\ \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{1}{\varepsilon}\rho_e,\ \nabla\cdot\vec{B}=0\ ; \\ \dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0,\quad \dfrac{\partial\rho_e}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_e\vec{v})=0\ ; \\ \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=\dfrac{e}{m}\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)-\nu\vec{v}\ . \end{cases} \tag{46.2}$$

Înmulțind ultima ecuație a sistemului (46.2) cu densitatea de sarcină electrică ρ_e și având în vedere că $\vec{J}=\rho_e\vec{v}$ se obține

$$\rho_e\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right]=\frac{\rho_e e}{m}\vec{E}+\frac{e}{m}\vec{J}\times\vec{B}-\nu\vec{J}\ ,$$

sau

$$\rho_e\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\rho_e e}{m}\vec{E}+\frac{e}{m}\vec{J}\times\vec{B}-\nu\vec{J}\ . \tag{46.3}$$

Pentru calcularea unicului termen din membrul stâng al ecuației de mai sus se pleacă de la ecuația $\nabla\times\vec{B}=\mu\vec{J}$, scrisă sub forma $\nabla\times\vec{B}=\mu\rho_e\vec{v}$. De aici rezultă

$$\vec{v}=\frac{1}{\mu\rho_e}\nabla\times\vec{B}\ \Rightarrow\ \frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mu\rho_e}\nabla\times\vec{B}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\rho_e\nabla\times\dfrac{d\vec{B}}{dt}-\dfrac{d\rho_e}{dt}\nabla\times\vec{B}}{\rho_e^2}\Rightarrow$$

$$\rho_e\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{1}{\mu\rho_e}\left(\rho_e\nabla\times\frac{d\vec{B}}{dt}-\frac{d\rho_e}{dt}\nabla\times\vec{B}\right)=\frac{1}{\mu}\nabla\times\frac{d\vec{B}}{dt}-\frac{\nabla\times\vec{B}}{\mu}\frac{1}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{dt}=$$

$$-\frac{\nabla\times\vec{B}}{\mu}\frac{1}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{dt}=-\vec{J}\frac{1}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{dt}=\vec{J}\ \nabla\cdot\vec{v},$$

unde s-a ținut cont de caracterul *static* al câmpului magnetic, $d\vec{B}/dt=0$ și de legea conservării sarcinii electrice, exprimată prin ecuația de continuitate

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_e\vec{v})=\frac{d\rho_e}{dt}+\rho_e\ \nabla\cdot\vec{v}=0\ \Rightarrow\ \frac{d\rho_e}{dt}=-\rho_e\ \nabla\cdot\vec{v}\ .$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dar, menținându-ne în cadrul aproximației de ordinul zero (care implică liniarizarea tuturor ecuațiilor), se poate scrie

$$\nabla\cdot\vec{v}=\nabla\cdot\left(\frac{1}{\mu\rho_e}\nabla\times\vec{B}\right)\cong\nabla\cdot\left(\frac{1}{\mu n_0 e}\nabla\times\vec{B}\right)=\frac{1}{\mu n_0 e}\left[\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right)\right]=0,$$

în care s-a folosit aproximația $\rho_e\cong\rho_{e0}$, unde $\rho_{e0}=en_0$ este densitatea de sarcină electrică de echilibru a electronilor.

În aceste condiții, ecuația (46.3) devine

$$\omega_p^2\vec{E}+\frac{e}{m}\vec{J}\times\vec{B}-\nu\vec{J}=0,$$

(unde $\omega_p^2=n_0e^2/m$ este *pulsația plasmei*), sau, pe componente,

$$\begin{cases}\omega_p^2E_x+\omega_BJ_y-\nu J_x=0,\\ \omega_p^2E_y-\omega_BJ_x-\nu J_y=0,\\ \omega_p^2E_z-\nu J_z=0,\end{cases}\qquad(46.4)$$

în care s-a introdus o nouă notație, $\omega_B=eB_z/m\equiv eB_0/m$ (*pulsația precesiei Larmor*) și s-a ținut cont de indicația din enunțul problemei de a considera câmpul magnetic static și uniform de-a lungul axei Oz: $\vec{B}=(0,\ 0,\ B_0)$.

Din ultima relație a sistemului (46.4) rezultă imediat

$$J_z=\frac{\omega_p^2}{\nu}E_z,$$

sau

$$J_z=0\cdot E_x+0\cdot E_y+\frac{\omega_p^2}{\nu}E_z=\frac{\omega_p^2}{\nu\left(1+\dfrac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)}\left[0\cdot E_x+0\cdot E_y+\left(1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)E_z\right].$$

(46.5.a)

Din prima relație a aceluiași sistem se exprimă J_y, care, introdus în cea de-a doua relație a sistemului dă componenta pe axa Ox a curentului

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\omega_p^2 E_x + \omega_B J_y - \nu J_x = 0 \quad \Rightarrow \quad J_y = \frac{\nu J_x - \omega_p^2 E_x}{\omega_B}, \tag{46.6}$$

$$\omega_p^2 E_y - \omega_B J_x - \nu J_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_p^2 E_y - \omega_B J_x - \nu \frac{\nu J_x - \omega_p^2 E_x}{\omega_B} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$J_x\left(\omega_B^2 + \nu^2\right) = \nu\omega_p^2 E_x + \omega_B \omega_p^2 E_y \quad \Rightarrow \quad J_x = \frac{\nu\omega_p^2 E_x + \omega_B \omega_p^2 E_y}{\nu^2 + \omega_B^2},$$

sau

$$J_x = \frac{\omega_p^2}{\nu\left(1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)} E_x + \frac{\omega_p^2}{\nu\left(1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)} \frac{\omega_B}{\nu} E_y + 0 \cdot E_z = \tag{46.5.b}$$

$$\frac{\omega_p^2}{\nu\left(1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)}\left(1 \cdot E_x + \frac{\omega_B}{\nu} E_y + 0 \cdot E_z\right).$$

În fine, cu J_x astfel determinat în (46.6), rezultă

$$J_y = \frac{\nu J_x - \omega_p^2 E_x}{\omega_B} = \frac{\nu \dfrac{\nu\omega_p^2 E_x + \omega_B \omega_p^2 E_y}{\nu^2 + \omega_B^2} - \omega_p^2 E_x}{\omega_B} = \frac{-\omega_B^2 \omega_p^2 E_x + \nu\omega_B \omega_p^2 E_y}{\omega_B\left(\nu^2 + \omega_B^2\right)},$$

sau

$$J_y = -\frac{\omega_p^2}{\nu\left(1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)} \frac{\omega_B}{\nu} E_x + \frac{\omega_p^2}{\nu\left(1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)} E_y + 0 \cdot E_z = \tag{46.5.c}$$

$$\frac{\omega_p^2}{\nu\left(1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)}\left(-\frac{\omega_B}{\nu} E_x + 1 \cdot E_y + 0 \cdot E_z\right).$$

Relațiile (46.5) pot fi scrise într-o singură formulă, şi anume

$$J_i = \lambda_{ij} E_j \quad \left(i, j = \overline{1,3}\right), \tag{46.7}$$

unde

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\lambda_{ij}=\frac{\omega_p^2}{\nu\left(1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2}\right)}\begin{pmatrix}1 & \frac{\omega_B}{\nu} & 0\\ -\frac{\omega_B}{\nu} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1+\frac{\omega_B^2}{\nu^2}\end{pmatrix} \tag{46.8}$$

este tensorul conductivității electrice.

b) În acest caz particular, anume, $\vec{E}=(E,\,0,\,0)$ şi $\vec{B}=(0,\,0,\,B)$, ecuația liniarizată de mişcare se scrie, pe componente, astfel

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_x}{\partial t}=\dfrac{eE}{m}+\dfrac{eB}{m}v_y-\nu v_x\,,\\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t}=-\dfrac{eB}{m}v_x-\nu v_y\,,\\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t}=-\nu v_z\,.\end{cases} \tag{46.9}$$

Ultima ecuație a sistemului (46.9) se integrează imediat şi dă pentru $v_z=v_z(t)$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}=-\nu v_z \;\Rightarrow\; v_z=C_1(x,y,z)e^{-\nu t}\,. \tag{46.10}$$

Derivând încă o dată în raport cu timpul prima ecuație a sistemului (46.9) şi folosind ecuația a doua a aceluiaşi sistem pentru a-l elimina pe $\partial v_y/\partial t$ şi din nou prima ecuație pentru a-l elimina definitiv pe v_y, se obține

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}=\omega_B\frac{\partial v_y}{\partial t}-\nu\frac{\partial v_x}{\partial t}=\omega_B\left(-\omega_B v_x-\nu v_y\right)-\nu\frac{\partial v_x}{\partial t}=-\omega_B^2 v_x-\nu\omega_B v_y-\nu\frac{\partial v_x}{\partial t}=$$

$$-\omega_B^2 v_x-\nu\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+\nu v_x-\frac{eE}{m}\right)-\nu\frac{\partial v_x}{\partial t}=-\omega_B^2 v_x-2\nu\frac{\partial v_x}{\partial t}-\nu^2 v_x+\frac{\nu eE}{m},$$

sau

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}+2\nu\frac{\partial v_x}{\partial t}+\left(\nu^2+\omega_B^2\right)v_x=\frac{\nu eE}{m}, \tag{46.11}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

care este o ecuație diferențială ordinară neomogenă, cu coeficienți constanți. Soluția generală a acestei ecuații este dată de suma dintre soluția generală a ecuației omogene atașate ecuației neomogene și o soluție particulară a ecuației neomogene, care poate fi determinată prin metoda generală a variației constantelor, sau, lucru posibil și în cazul de față, de forma termenului de neomogenitate – în acest caz, o constantă. Ecuația omogenă atașată ecuației neomogene (46.11) este

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}+2\nu\frac{\partial v_x}{\partial t}+\left(\nu^2+\omega_B^2\right)v_x=0,$$

iar ecuația caracteristică atașată acestei ecuații este

$$r^2+2\nu r+\left(\nu^2+\omega_B^2\right)=0$$

și are soluțiile

$$r_{1,2}=-\nu\pm i\omega_B.$$

Soluția generală a ecuației omogene este, așadar,

$$v_{xo}=C_2(x,y,z)e^{-\nu t}e^{i\omega_B t}+C_3(x,y,z)e^{-\nu t}e^{-i\omega_B t}. \qquad (46.12)$$

Fie $v_{xp}=K_p=const.$ o soluție particulară a ecuației neomogene (46.11). Impunând ca v_{xp} să verifice ecuația (46.11), rezultă

$$K_p\left(\nu^2+\omega_B^2\right)=\frac{\nu eE}{m}\Rightarrow K_p=v_{xp}=\frac{\nu eE}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)},$$

deci soluția generală a ecuației inițiale este

$$v_x=v_{xo}+v_{xp}=C_2(x,y,z)e^{-\nu t}e^{i\omega_B t}+C_3(x,y,z)e^{-\nu t}e^{-i\omega_B t}+\frac{\nu eE}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}, \qquad (46.13)$$

care mai poate fi scrisă și sub forma

$$v_x=v_{xo}+v_{xp}=e^{-\nu t}\left[C_2(x,y,z)\sin\omega_B t+C_3(x,y,z)\cos\omega_B t\right]+\frac{\nu eE}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}. \qquad (46.14)$$

Din prima ecuație a sistemului (46.9) rezultă și componenta v_y a vitezei, care este dată de

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$v_y=\frac{1}{\omega_B}\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{\nu v_x}{\omega_B}-\frac{eE}{m\omega_B}=-\frac{\nu e^{-\nu t}}{\omega_B}\left[C_2(x,y,z)\sin\omega_B t+C_3(x,y,z)\cos\omega_B t\right]+$$

$$e^{-\nu t}\left[C_2(x,y,z)\cos\omega_B t-C_3(x,y,z)\sin\omega_B t\right]+\frac{\nu e^{-\nu t}}{\omega_B}\left[C_2(x,y,z)\sin\omega_B t+\right.$$

$$\left.C_3(x,y,z)\cos\omega_B t\right]+\frac{\nu^2 eE}{m\omega_B\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}-\frac{eE}{m\omega_B}=e^{-\nu t}\left[C_2(x,y,z)\cos\omega_B t-\right.$$

$$\left.C_3(x,y,z)\sin\omega_B t\right]-\frac{eE\omega_B}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}.$$

Aşadar, vectorul viteză $\vec{v}=\left(v_x,v_y,v_z\right)$ al fluidului este

$$\begin{cases} v_x(x,y,z,t)=e^{-\nu t}\left[C_2(x,y,z)\sin\omega_B t+C_3(x,y,z)\cos\omega_B t\right]+\dfrac{eE\nu}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}, \\ v_y(x,y,z,t)=e^{-\nu t}\left[C_2(x,y,z)\cos\omega_B t-C_3(x,y,z)\sin\omega_B t\right]-\dfrac{eE\omega_B}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}, \\ v_z(x,y,z,t)=C_1(x,y,z)e^{-\nu t}. \end{cases} \tag{46.15}$$

Considerând cazul cel mai simplu, când cele trei „constante" de integrare din relațiile (46.15) sunt constante veritabile şi folosind din nou aproximația $\rho_e\cong\rho_{e0}=en_0$, dependența de timp a curentului va fi aceeaşi cu cea a vitezei

$$\begin{cases} J_x=en_0\left[C_2\sin\omega_B t+C_3\cos\omega_B t\right]e^{-\nu t}+\dfrac{n_0e^2E\nu}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}, \\ J_y=en_0\left[C_2\cos\omega_B t-C_3\sin\omega_B t\right]e^{-\nu t}-\dfrac{n_0e^2E\omega_B}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}, \\ J_z=en_0C_1e^{-\nu t}, \end{cases} \tag{46.16}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în care cele trei constante arbitrare de integrare, C_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$ se determină din condițiile inițiale: $J_i(t=0)=0$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$. Impunând aceste condiții, se obține următorul sistem de trei ecuații algebrice pentru cele trei necunoscute C_i $\left(i=\overline{1,3}\right)$:

$$\begin{cases} 0=en_0C_3+\dfrac{n_0e^2E\nu}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}, \\ 0=en_0C_2-\dfrac{n_0e^2E\omega_B}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}, \\ 0=en_0C_1, \end{cases}$$

care are soluția

$$\begin{cases} C_3=-\dfrac{eE\nu}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}, \\ C_2=\dfrac{eE\omega_B}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}, \\ C_1=0. \end{cases}$$

Cu aceste constante în (46.16) rezultă forma finală a dependenței de timp a curentului

$$\begin{cases} J_x=en_0\left[\dfrac{eE\omega_B}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}\sin\omega_Bt-\dfrac{eE\nu}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}\cos\omega_Bt\right]e^{-\nu t}+\dfrac{n_0\nu e^2E}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}, \\ J_y=en_0\left[\dfrac{eE\omega_B}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}\cos\omega_Bt+\dfrac{eE\nu}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}\sin\omega_Bt\right]e^{-\nu t}-\dfrac{n_0e^2E\omega_B}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}, \\ J_z=0, \end{cases}$$

sau

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} J_x = \dfrac{e^2 E n_0}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}\left[\omega_B \sin\omega_B t + \nu\left(e^{\nu t}-\cos\omega_B t\right)\right]e^{-\nu t}, \\ J_y = \dfrac{n_0 e^2 E}{m\left(\nu^2+\omega_B^2\right)}\left[\nu \sin\omega_B t - \omega_B\left(e^{\nu t}-\cos\omega_B t\right)\right]e^{-\nu t}, \\ J_z = 0, \end{cases} \quad (46.17)$$

relații ale căror reprezentări grafice, pentru următoarele date numerice

****

$q = -1.6*10\text{^}-19;$

$n_0 = 10\text{^}20;$

$m = 9.1*10\text{^}-31;$

$EE = 10\text{^}-4;$

$B = 10\text{^}-7;$

$\omega_B = \dfrac{q*B}{m};$

$\nu = 10\text{^}2;$

$K = \dfrac{n_0 * q^2 * EE}{m*\left(\nu^2+\omega_B^2\right)};$

$J_x[t_] := K*e^{-\nu*t}\left(\omega_B*\text{Sin}[\omega_B*t]+\nu*\left(e^{\nu*t}-\text{Cos}[\omega_B*t]\right)\right);$

$J_y[t_] := K*e^{-\nu*t}\left(\nu*\text{Sin}[\omega_B*t]-\omega_B*\left(e^{\nu*t}-\text{Cos}[\omega_B*t]\right)\right);$

$t_{i1} = 0.0;$

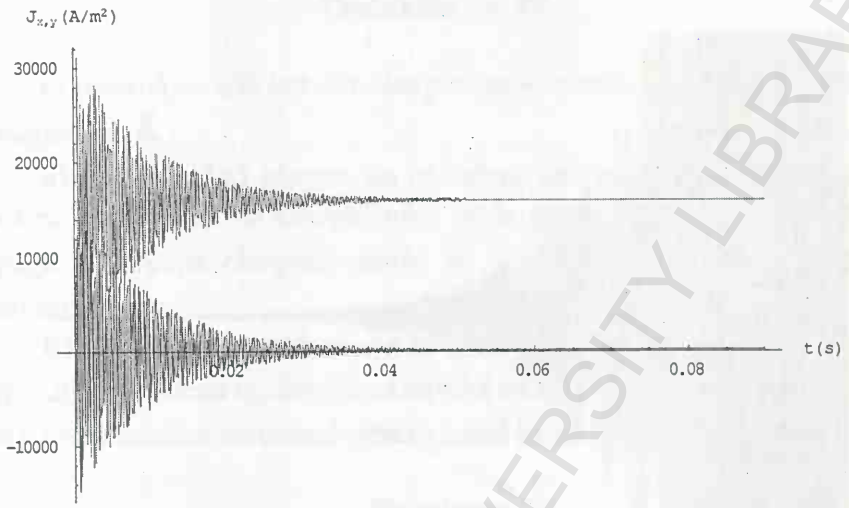
$t_{f1} = 0.9*10\text{^}-1;$

****

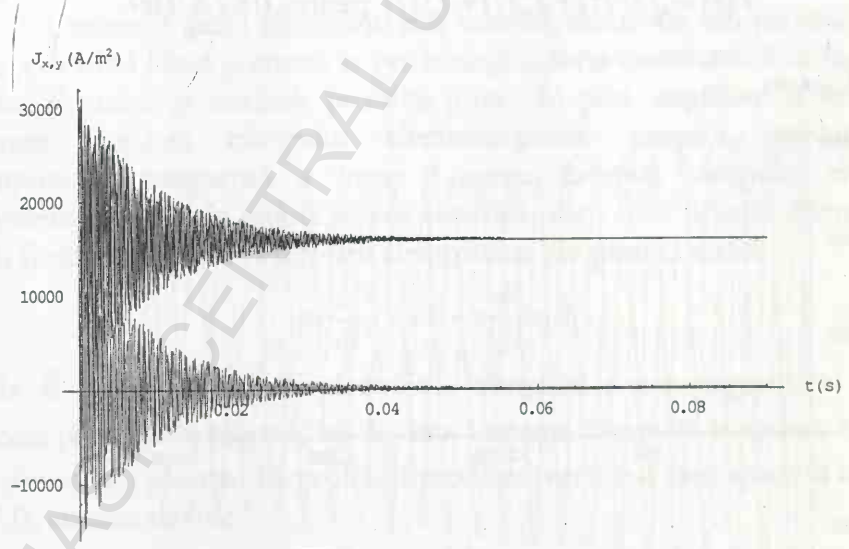
arată ca în figurile de mai jos. De asemenea, dăm reprezentarea grafică a dependenței de timp a curentului total

$$J(t) = \sqrt{J_x^2+J_y^2+J_z^2} = \frac{n_0 e^2 E}{m\sqrt{\nu^2+\omega_B^2}}\sqrt{2e^{-\nu t}\left[\cosh(\nu t)-\cos(\omega_B t)\right]}. \quad (46.18)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



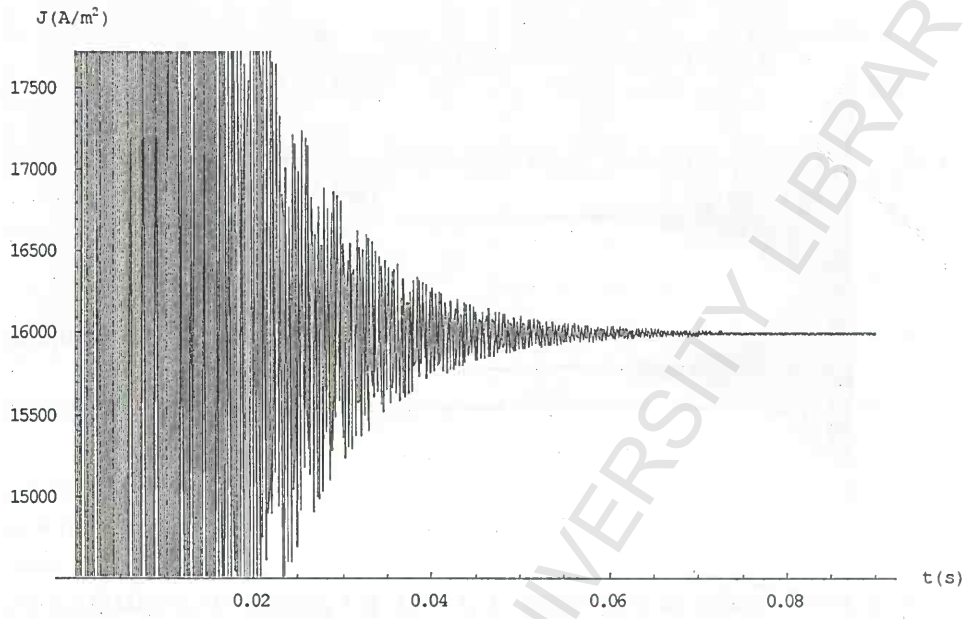
$J_x = J_x(t)$ (curba de dedesubt) şi $J_y = J_y(t)$ pentru $0 \le t \le 0.09$.



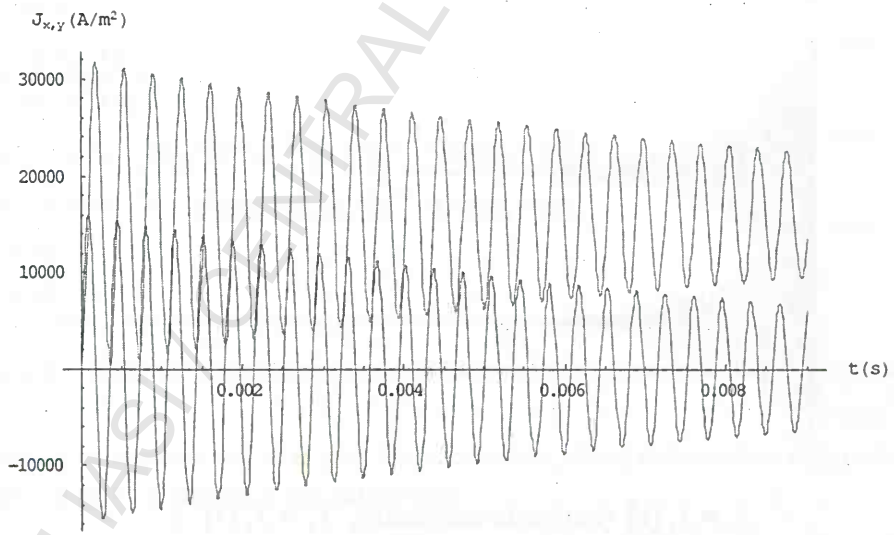
$J_x = J_x(t)$ (curba de dedesubt), $J_y = J_y(t)$ şi

$J(t) = \sqrt{J_x^2(t) + J_y^2(t) + J_z^2(t)}$ (cuasi-suprapuse) pentru $0 \le t \le 0.09$.

B.C.U. „M. EMINESCU" IAŞI
FIZICĂ
BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



$J(t)=\sqrt{J_x^2(t)+J_y^2(t)+J_z^2(t)}$ pentru $0\le t\le 0.09$.



$J_x=J_x(t)$ (curba de dedesubt) şi $J_y=J_y(t)$ pentru $0\le t\le 0.009$.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 47

O plasmă se află într-un câmp magnetic static şi omogen cu inducţia magnetică $\vec{B}_0$.

a) Considerând plasma un gaz electronic rarefiat, să se determine mişcarea electronilor în câmpul unei unde plane monocromatice care se propagă în direcţia câmpului static $\vec{B}_0$ şi să se afle relaţia de dispersie corespunzătoare;

b) Să se calculeze viteza de grup a unei unde electromagnetice care se propagă în plasmă în direcţia câmpului magnetic static şi omogen $\vec{B}_0$, şi să se particularizeze rezultatul pentru cazul în care $n-1 \ll 1$.

Rezolvare

Fără a restrânge generalitatea problemei, vom considera câmpul magnetic de inducţie $\vec{B}_0$, în care se află plasma, orientat după axa Oz.

Deoarece gazul electronic este rarefiat, electronii din plasmă pot fi trataţi ca fiind liberi şi atunci se poate neglija forţa cvasielastică de legătură dintre electroni şi nucleele pozitive (ioni). În plus, neglijând şi forţa de frânare datorată câmpului electromagnetic propriu, precum şi componenta magnetică a forţei Lorentz datorată câmpului electromagnetic al undei, în raport cu cea electrică, vom scrie ecuaţia diferenţială (sub formă vectorială) a mişcării electronilor din plasmă astfel

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e\vec{E} + e\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{B}_0, \tag{47.1}$$

unde $\vec{E}$ este componenta electrică a câmpului electromagnetic al undei care se propagă în plasmă, iar $\vec{B}_0$ este inducţia câmpului magnetic extern, în care se află plasma. Dezvoltând produsul vectorial care apare în ecuaţia (47.1), aceasta devine

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e\vec{E} + e\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = e\vec{E} + e\dot{y}B_0\vec{i} - e\dot{x}B_0\vec{j}, \tag{47.2}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $\vec{i}, \vec{j}$ şi $\vec{k}$ sunt versorii axelor de coordonate. Deoarece produsul vectorial $\vec{v}\times\vec{B}_0$ nu dă componentă pe axa Oz şi $E_z = 0$ (vezi explicaţiile de mai jos), vom lăsa la o parte mişcarea după această direcţie şi în continuare ne vom ocupa de proiecţiile după axele de coordonate Ox şi Oy ale ecuaţiei de mişcare a electronilor, scrisă sub froma (47.2). Aceste proiecţii sunt

$$\ddot{x} = \frac{e}{m}E_x + \frac{eB_0}{m}\dot{y}, \qquad (47.3, \text{a})$$

$$\ddot{y} = \frac{e}{m}E_y - \frac{eB_0}{m}\dot{x}. \qquad (47.3, \text{b})$$

Să facem acum schimbarea de variabile: $u = x + iy$, $\mathfrak{E} = E_x + iE_y$ şi $\mathfrak{B} = B_x + iB_y$. Înmulţind ecuaţia (47.3, b) cu numărul complex $i = \sqrt{-1}$ şi adunând membru cu membru ecuaţia astfel obţinută cu (47.3, a), rezultă

$$\ddot{x} + i\,\ddot{y} = \frac{e}{m}\left(E_x + iE_y\right) - \frac{eB_0}{m}\left(i\,\dot{x} - \dot{y}\right) \Leftrightarrow \ddot{x} + i\,\ddot{y} = \frac{e}{m}\left(E_x + iE_y\right) - i\frac{eB_0}{m}\left(\dot{x} + i\dot{y}\right),$$

adică

$$\ddot{u} + i\omega_0\dot{u} = \frac{e}{m}\mathfrak{E}, \qquad (47.4)$$

unde am utilizat notaţia $\frac{eB_0}{m} \equiv \omega_0$.

Pe de altă parte, în proiecţie pe axele de coordonate Ox şi Oy, ecuaţiile Maxwell

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (47.5)$$

şi

$$rot\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (47.6)$$

se scriu astfel

$$Ox: \quad \left(rot\,\vec{E}\right)_x \left(= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \overset{E_z=0}{=} -\frac{\partial E_y}{\partial z}\right) = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \qquad (47.5', \text{a})$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$Oy:\quad \left(rot\,\vec{E}\right)_y\left(=\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\overset{E_z=0}{=}\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)=-\frac{\partial B_y}{\partial t},\qquad (47.5',\ b)$$

respectiv

$$\left(rot\,\vec{B}\right)_x\left(=\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\overset{B_z=B_0=const.}{=}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)=\mu_0 j_x+\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t},\ (47.6',\ a)$$

$$\left(rot\,\vec{B}\right)_y\left(=\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\overset{B_z=B_0=const.}{=}\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)=\mu_0 j_y+\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}.\ (47.6',\ b)$$

Aşa după cum se precizează în enunţul problemei, unda electromagnetică plană şi monocromatică ce se propagă în plasmă are aceeaşi direcţie cu câmpul static $\vec{B}_0$ (aleasă de la început ca fiind direcţia axei Oz). Deoarece unda electromagnetică plană şi monocromatică este o undă transversală, rezultă că intensitatea câmpului electric al undei, $\vec{E}$, este orientată într-un plan perpendicular pe direcţia de propagare, adică în planul xOy; deci $E_z=0$, lucru utilizat în deducerea ecuaţiilor (47.5').

Să facem şi în aceste ecuaţii schimbarea de variabile amintită anterior. Înmulţind ecuaţiile (47.5', b) şi respectiv (47.6', b) cu numărul imaginar $i=\sqrt{-1}$ şi adunându-le membru cu membru cu ecuaţiile (47.5', a) şi respectiv (47.6', a), se obţin următoarele ecuaţii pentru noile variabile:

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{\partial\left(iE_x\right)}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}-\frac{\partial\left(iB_y\right)}{\partial t}\ \Leftrightarrow\ i\frac{\partial\left(E_x+iE_y\right)}{\partial z}=-\frac{\partial\left(B_x+iB_y\right)}{\partial t}\ \Leftrightarrow$$

$$i\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}=-\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}\ \Leftrightarrow\ \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial z}-i\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}=0 \qquad (47.7)$$

şi

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z}+\frac{\partial\left(iB_x\right)}{\partial z}=\mu_0 j_x+\mu_0 i\,j_y+\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\left(iE_y\right)}{\partial t}\Leftrightarrow$$

$$i\frac{\partial\left(B_x+iB_y\right)}{\partial z}=\mu_0\left(j_x+i\,j_y\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\left(E_x+iE_y\right)}{\partial t}\ \Leftrightarrow \qquad (47.8)$$

$$i\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}=\mu_0\mathrm{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\ \Leftrightarrow\ \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial z}+\frac{i}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}=-i\mu_0\mathrm{J},$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde, în acelaşi ton cu schimbările de variabilă anterioare, am introdus o nouă variabilă,

$$J = j_x + i\, j_y = Ne\dot{x} + iNe\dot{y} = Ne\left(\dot{x} + i\,\dot{y}\right) = Ne\dot{u}\,, \tag{47.9}$$

N fiind densitatea electronilor din plasmă, care, în primă aproximaţie, într-o plasmă rarefiată pot fi consideraţi ca fiind liberi.

Am obţinut astfel următorul sistem de trei ecuaţii diferenţiale cuplate pentru u, $\mathcal{E}$ şi $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} \ddot{u} + i\omega_0 \dot{u} = \dfrac{e}{m}\mathcal{E}, \\ \dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - i\dfrac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} + \dfrac{i}{c^2}\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -i\mu_0 Ne\dot{u}, \end{cases} \tag{47.10}$$

unde am ţinut cont de relaţia (47.9).

Ţinând seama de cerinţele problemei, vom căuta necunoscutele u, $\mathcal{E}$ şi $\mathcal{B}$ ale sistemului (47.10) sub forma unor unde plane de aceeaşi pulsaţie ω şi acelaşi număr de undă k (unde plane monocromatice)

$$\begin{cases} u = U\, e^{\pm i(kz - \omega t)}, \\ \mathcal{E} = V\, e^{\pm i(kz - \omega t)}, \\ \mathcal{B} = W\, e^{\pm i(kz - \omega t)}. \end{cases} \tag{47.11}$$

Aşa cum cere enunţul problemei, în (47.11) am considerat cazul particular în care unda monocromatică se propagă în direcţia câmpului static $\vec{B}_0$ (adică, aşa cum am presupus la început, în direcţia axei Oz).

Impunând ca (47.11) să verifice sistemul de ecuaţii (47.10), se obţine următorul sistem liniar şi omogen în necunoscutele U, V şi W:

$$\begin{cases} -\omega^2 U + i\omega_0\left(\mp i\omega U\right) = \dfrac{e}{m}V, \\ \pm ikV \mp \omega W = 0, \\ \pm ikW + \dfrac{i}{c^2}\left(\mp i\omega V\right) = -i\mu_0 Ne\left(\mp i\omega U\right), \end{cases}$$

sau

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} -\omega^2 U \pm \omega\omega_0 U = (e/m)V, \\ ikV = \omega W, \\ ikW + (\omega/c^2)V = -\mu_0 Ne\omega U, \end{cases}$$

iar de aici

$$\begin{cases} \left(-\omega^2 \pm \omega\omega_0\right)U - \dfrac{e}{m}V + 0\cdot W = 0, \\ 0\cdot U + ikV - \omega W = 0, \\ \mu_0 Ne\omega U + \dfrac{\omega}{c^2}V + ikW = 0. \end{cases} \qquad (47.12)$$

Pentru ca sistemul (47.12) să aibă şi soluţii diferite de soluţia trivială, trebuie ca determinantul matricei sistemului să se anuleze

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 \pm \omega\omega_0 & -\dfrac{e}{m} & 0 \\ 0 & ik & -\omega \\ \mu_0 Ne\omega & \dfrac{\omega}{c^2} & ik \end{vmatrix} = 0,$$

sau

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\left(-\omega^2 \pm \omega\omega_0\right) + \frac{\mu_0 Ne^2\omega^2}{m} = 0,$$

adică

$$\left(1 - \frac{k^2c^2}{\omega^2}\right)\left(\omega^2 \mp \omega\omega_0\right) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m},$$

de unde

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}\left(= \frac{c^2}{v_f^2} = n^2\right) = 1 - \frac{\dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}{\omega^2 \mp \omega\omega_0} \Rightarrow n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega(\omega \mp \omega_0)}, \qquad (47.13)$$

sau, introducând notaţia $\dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \equiv \omega_p^2$ (pătratul pulsaţiei plasmei):

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \mp \omega\omega_0},$$

adică relaţia de dispersie cerută. În relaţia (47.13) $v_f = \omega/k$ este viteza de fază a undei.

Pentru a afla ecuaţia de mişcare a electronilor din plasmă trebuie să-l determinăm pe u. Făcând raportul primelor două relaţii ale sistemului (47.11) rezultă

$$u = \frac{U}{V}\mathcal{E},$$

relaţie care, exprimând fracţia U/V din prima relaţie a sistemului (47.12), devine

$$u = \frac{U}{V}\mathcal{E} = \frac{e/m}{-\omega^2 \pm \omega\omega_0}\mathcal{E} = -\frac{e\mathcal{E}}{m\omega(\omega \mp \omega_0)}. \qquad (47.14)$$

Având în vedere că $u = x + iy$ şi $\mathcal{E} = E_x + iE_y$, prin separarea părţilor reală şi imaginară ale acestei ultime relaţii, se găseşte că

$$x = -\frac{eE_x}{m\omega(\omega \mp \omega_0)}$$

şi

$$y = -\frac{eE_y}{m\omega(\omega \mp \omega_0)}.$$

Înglobând acum şi mişcarea pe direcţia câmpului magnetic static, rezultă că ecuaţia de mişcare a electronilor plasmei se scrie sub formă vectorială astfel

$$\vec{r} = -\frac{e\vec{E}}{m\omega(\omega \mp \omega_0)} = -\frac{e}{m}\frac{\vec{E}}{\omega^2 \mp \omega\dfrac{eB_0}{m}}. \qquad (47.15)$$

Observaţie: Dacă inducţia câmpului magnetic static în care se află plasma este nulă, $\vec{B}_0 = 0$, relaţiile (47.13) şi (47.15) se reduc la forma lor corespunzătoare unei plasme în lipsa unui câmp exterior

$$\varepsilon_r \left(\equiv n^2\right) = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega^2},$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(deoarece pentru gazele rarefiate se poate aproxima $\mu_r \cong 1$) şi respectiv

$$\vec{r} = -\frac{e\vec{E}}{m\omega^2}.$$

b) Conform definiției vitezei de grup, $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$, avem

$$\frac{1}{v_g} = \frac{\partial k}{\partial \omega}\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{n\omega}{c}\right) = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{\partial n}{\partial \omega}. \qquad (47.16)$$

Din relația (47.13) rezultă că

$$n = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m\omega(\omega \mp \omega_0)}} \cong 1 - \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\omega(\omega \mp \omega_0)},$$

unde s-a folosit aproximația $\sqrt{1-\xi} = (1-\xi)^{\frac{1}{2}} \cong 1 - \frac{\xi}{2}$, $|\xi| < 1$, a cărei valabilitate este asigurată în acest caz de faptul că densitatea electronilor liberi (de fapt densitatea atomilor polarizați) dintr-un gaz, N, este relativ mică. Această aproximație este dată în enunțul problemei în formularea matematică echivalentă: $n - 1 \ll 1$. Atunci

$$\frac{\partial n}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left[1 - \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\omega(\omega \mp \omega_0)}\right] = -\frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m}\cdot\frac{\partial}{\partial \omega}\left[\frac{1}{\omega(\omega \mp \omega_0)}\right] =$$

$$-\frac{\omega_p^2}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial \omega}\left[\frac{1}{\omega(\omega \mp \omega_0)}\right] = -\frac{\omega_p^2}{2}\left[-\frac{(\omega \mp \omega_0) + \omega}{\omega^2(\omega \mp \omega_0)^2}\right] = \frac{\omega_p^2}{2}\cdot\frac{2\omega \mp \omega_0}{\omega^2(\omega \mp \omega_0)^2},$$

care, înlocuită în (47.16) dă

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n}{c} + \frac{\omega}{c}\frac{\partial n}{\partial \omega} = \frac{1}{c}\left[1 - \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m\omega(\omega \mp \omega_0)}\right] + \frac{\omega\omega_p^2}{2c}\cdot\frac{2\omega \mp \omega_0}{\omega^2(\omega \mp \omega_0)^2} =$$

$$\frac{1}{c}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega \mp \omega_0)}\right] + \frac{\omega\omega_p^2}{2c}\cdot\frac{2\omega \mp \omega_0}{\omega^2(\omega \mp \omega_0)^2} = \frac{1}{c}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega(\omega \mp \omega_0)} + \right.$$

$$\left.\frac{\omega_p^2(2\omega \mp \omega_0)}{2\omega(\omega \mp \omega_0)^2}\right] = \frac{1}{c}\left[1 - \frac{\omega_p^2(\omega \mp \omega_0)}{2\omega(\omega \mp \omega_0)^2} + \frac{\omega_p^2(2\omega \mp \omega_0)}{2\omega(\omega \mp \omega_0)^2}\right] = \frac{1}{c}\left[1 + \frac{\omega_p^2}{2(\omega \mp \omega_0)^2}\right],$$

de unde

BCU "ST. GEORGE" UNIVERSITY LIBRARY

$$v_g = c\,\frac{1}{1+\dfrac{\omega_p^2}{2(\omega \mp \omega_0)^2}} = c\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\omega_p}{\omega \mp \omega_0}\right)^2} < c\,. \qquad (47.17)$$

Problema nr. 48

Un fluid conductor, omogen, vâscos şi incompresibil este plasat între planele conductoare, $z=0$ şi $z=d$. Planul $z=d$ se deplasează de-a lungul axei Ox cu viteza constantă v_0. Să se determine distribuţia vitezelor în fluidul aflat în mişcare staţionară, dacă de-a lungul axei Oz acţionează un câmp magnetic uniform, $\vec{H}_0$, iar de-a lungul axei Oy este prezent un câmp electric uniform, $\vec{E}_0$.

Rezolvare

După cum se ştie din teoria elementară a magnetofluidodinamicii, ecuaţia de mişcare a unui fluid conductor, perfect vâscos (newtonian) este

$$\rho_m \vec{a} = \rho_m \vec{F} - grad\, p + (\xi + \eta)\, grad\ \theta' + \eta \Delta \vec{v} + \vec{j} \times \vec{B}, \qquad (48.1)$$

unde ρ_m este densitatea de masă a fluidului, $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ este acceleraţia fluidului (a particulei de fluid), $\vec{F}$ este forţa masică specifică de natură neelectromagnetică (dacă, de exemplu, fluidul se află în câmp gravitaţional, aceasta este chiar acceleraţia gravitaţională, $\vec{g}$), ξ şi η sunt coeficienţii de vâscozitate dinamică, iar $\theta' \equiv div\ \vec{v} \equiv \nabla \cdot \vec{v}$.

După cum se poate arăta cu uşurinţă utilizând ecuaţia de continuitate pentru masa de fluid, faptul că fluidul este omogen şi incompresibil se traduce prin aceea că $\nabla \cdot \vec{v} = \theta' = 0$. Într-adevăr, din ecuaţia de continuitate scrisă sub forma $\dfrac{d\rho_m}{dt} + \rho_m div\ \vec{v} = 0$, dacă $\rho_m(\vec{r},$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$t) = const.$ (adică fluidul este omogen şi incompresibil) rezultă simplu $div\ \vec{v} = 0$.

Din enunţul problemei rezultă că şi acceleraţia particulei de fluid trebuie considerată nulă şi, în plus, dacă neglijăm efectul gravitaţiei în comparaţie cu cel al câmpurilor electric şi magnetic (ipoteză foarte plauzibilă dacă ne gândim la diferenţa enormă dintre constantele de cuplaj ale celor două câmpuri: gravitaţional şi electromagnetic), atunci ecuaţia de mişcare (48.1) capătă forma mai simplă

$$grad\ p = \eta \Delta \vec{v} + \vec{j} \times \vec{B}\,. \tag{48.2}$$

Aici, densitatea curentului electric din fluidul conductor, $\vec{j}$, este legată de conductivitatea λ a acestuia prin relaţia $\vec{j} = \lambda\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$ [legea lui Ohm]. Scrisă pe componente, această relaţie conduce la

$$\vec{j} = \begin{cases} j_x = \lambda E_x + \lambda\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_x = \lambda E_x + \lambda\left(v_y B_z - v_z B_y\right) = 0, \\ j_y = \lambda E_y + \lambda\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_y = \lambda E_y + \lambda\left(v_z B_x - v_x B_z\right) = \lambda E_0 - \mu_0 \lambda v_x(z) H_0, \\ j_z = \lambda E_z + \lambda\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_z = \lambda E_z + \lambda\left(v_x B_y - v_y B_x\right) = 0, \end{cases}$$

unde am ţinut seama că fluidul se mişcă de-a lungul axei Ox, iar viteza lui în orice punct depinde doar de poziţia acelui punct între cele două plane, adică, ţinând cont de simetria problemei, doar de coordonata z: $\vec{v} = v_x \vec{u}_x = v_x(z)\vec{u}_x$.

Având în vedere faptul că

$$\vec{j} \times \vec{B} = \begin{cases} \left(\vec{j} \times \vec{B}\right)_x = j_y B_z - j_z B_y = j_y B_0 = \mu_0 j_y H_0 = \mu_0 \lambda H_0 \left[E_0 - \mu_0 v_x(z) H_0\right], \\ \left(\vec{j} \times \vec{B}\right)_y = j_z B_x - j_x B_z = 0, \\ \left(\vec{j} \times \vec{B}\right)_z = j_x B_y - j_y B_x = -j_y \mu_0 H_x = -\mu_0 \lambda H_x \left[E_0 - \mu_0 v_x(z) H_0\right], \end{cases}$$

în proiecţie pe cele trei axe de coordonate, ecuaţia de mişcare (48.2) se scrie astfel

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \eta \underbrace{\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}}_{=\frac{d^2 v_x}{dz^2}} + \mu_0 \lambda H_0 \left(E_0 - \mu_0 v_x H_0\right), \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\mu_0 \lambda H_x \left(E_0 - \mu_0 v_x H_0\right). \end{cases} \tag{48.3}$$

Întrucât, datorită simetriei aferente geometriei problemei, de-a lungul axei Ox nu există gradient de presiune: $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$, din (48.3 – 1) rezultă ecuația pentru distribuția vitezei în fluid, $v \equiv v_x = v_x(z)$

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} - \frac{\lambda \mu_0^2 H_0^2}{\eta} v_x = -\frac{\lambda \mu_0 H_0 E_0}{\eta},$$

sau, introducând notația $\dfrac{\lambda \mu_0^2 H_0^2}{\eta} = \dfrac{1}{d_0^2}$,

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} - \frac{1}{d_0^2} v_x = -\frac{1}{d_0^2} \frac{E_0}{\mu_0 H_0}. \tag{48.4}$$

Avem deci de rezolvat problema Cauchy pentru ecuația (48.4) cu condițiile $v_x(z=0) = 0$ și $v_x(z=d) = v_0$. Ecuația (48.4) este o ecuație diferențială ordinară neomogenă, de ordinul doi, cu coeficienți constanți. Soluția generală a acestei ecuații este dată de suma dintre soluția generală a ecuației omogene atașate și o soluție particulară a ecuației neomogene, care, în cazul general poate fi determinată prin metoda variației constantelor. În acest caz însă, soluția particulară se poate afla mai simplu, alegând-o de forma termenului care dă neomogenitatea (membrul drept al ecuației), adică sub forma unei constante.

Ecuația omogenă atașată ecuației neomogene este

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} - \frac{1}{d_0^2} v_x = 0, \tag{48.5}$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar ecuația caracteristică atașată acesteia din urmă este

$$r^2 - \frac{1}{d_0^2} = 0,$$

cu soluțiile reale $r_{1,2} = \pm\frac{1}{d_0}$. Atunci, soluția generală a ecuației omogene (48.5) poate fi scrisă astfel

$$v_x^o(z) = V_1\, e^{\frac{z}{d_0}} + V_2\, e^{-\frac{z}{d_0}}, \tag{48.6}$$

unde V_1 și V_2 sunt două constante arbitrare de integrare, sau, sub o formă echivalentă

$$v_x^o(z) = W_1 \sinh\frac{z}{d_0} + W_2 \cosh\frac{z}{d_0}, \tag{48.7}$$

unde W_1 și W_2 sunt alte două constante arbitrare de integrare (legate de V_1 și V_2 prin relații ce pot fi deduse cu ușurință, ținând cont de relațiile de definiție ale sinusului și cosinusului hiperbolic $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ și respectiv $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$).

Vom alege forma (48.7) a soluției ecuației omogene (48.5) și vom căuta o soluție particulară a ecuației neomogene de forma $v_x^p = W_3$, unde W_3 este o constantă reală nenulă. Impunând ca această soluție particulară să verifice ecuația neomogenă (48.4), rezultă

$$-\frac{1}{d_0^2} v_x^p \left(= -\frac{1}{d_0^2} W_3 \right) = -\frac{1}{d_0^2}\frac{E_0}{\mu_0 H_0} \Rightarrow W_3 = \frac{E_0}{\mu_0 H_0}.$$

Atunci, soluția generală a ecuației neomogene este

$$v_x(z) = v_x^o(z) + v_x^p = W_1 \sinh\frac{z}{d_0} + W_2 \cosh\frac{z}{d_0} + \frac{E_0}{\mu_0 H_0}, \tag{48.8}$$

în care, constantele arbitrare de integrare W_1 și W_2 se deduc din condițiile $v_x(z=0) = 0$ și $v_x(z=d) = v_0$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} v_x(0) = W_2 + \dfrac{E_0}{\mu_0 H_0} = 0, \\ v_x(d) = W_1 \sinh\dfrac{d}{d_0} + W_2 \cosh\dfrac{d}{d_0} + \dfrac{E_0}{\mu_0 H_0} = v_0. \end{cases}$$

Din prima ecuație a sistemului de mai sus rezultă simplu $W_2 = -\dfrac{E_0}{\mu_0 H_0}$, care, introdusă în cea de-a doua ecuație, conduce la

$$W_1 \sinh\frac{d}{d_0} - \frac{E_0}{\mu_0 H_0}\cosh\frac{d}{d_0} + \frac{E_0}{\mu_0 H_0} = v_0,$$

de unde

$$W_1 = \frac{v_0 - \dfrac{E_0}{\mu_0 H_0}\left(1 - \cosh\dfrac{d}{d_0}\right)}{\sinh\dfrac{d}{d_0}}.$$

Introducând constantele W_1 și W_2 astfel determinate în relația (48.8) rezultă

$$v_x(z) = \frac{v_0 - \dfrac{E_0}{\mu_0 H_0}\left(1 - \cosh\dfrac{d}{d_0}\right)}{\sinh\dfrac{d}{d_0}} \sinh\frac{z}{d_0} - \frac{E_0}{\mu_0 H_0}\cosh\frac{z}{d_0} + \frac{E_0}{\mu_0 H_0} = \frac{v_0}{\sinh\dfrac{d}{d_0}} \times$$

$$\sinh\frac{z}{d_0} + \frac{E_0}{\mu_0 H_0}\left[1 - \cosh\frac{z}{d_0} - \frac{\left(1 - \cosh\dfrac{d}{d_0}\right)}{\sinh\dfrac{d}{d_0}}\sinh\frac{z}{d_0}\right] = \frac{v_0}{\sinh\dfrac{d}{d_0}} \times$$

$$\sinh\frac{z}{d_0} + \frac{E_0}{\mu_0 H_0}\left[1 - \frac{\left(\sinh\dfrac{d}{d_0}\cosh\dfrac{z}{d_0} - \sinh\dfrac{z}{d_0}\cosh\dfrac{d}{d_0}\right) + \sinh\dfrac{z}{d_0}}{\sinh\dfrac{d}{d_0}}\right] =$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{v_0}{\sinh\frac{d}{d_0}}\sinh\frac{z}{d_0}+\frac{E_0}{\mu_0 H_0}\left[1-\frac{\sinh\frac{d-z}{d_0}+\sinh\frac{z}{d_0}}{\sinh\frac{d}{d_0}}\right],$$

unde am utilizat formula din trigonometria funcțiilor hiperbolice

$$\sinh(x-y)=\sinh x\cosh y-\sinh y\cosh x.$$

Aşadar, distribuția căutată pentru viteza fluidului este

$$v_x(z)=v_0\frac{\sinh\frac{z}{d_0}}{\sinh\frac{d}{d_0}}+\frac{E_0}{\mu_0 H_0}\left[1-\frac{\sinh\frac{d-z}{d_0}+\sinh\frac{z}{d_0}}{\sinh\frac{d}{d_0}}\right]. \qquad (48.9)$$

Pentru $d\ll d_0=\sqrt{\frac{\eta}{\lambda}}\frac{1}{\mu_0 H_0}$ (ceea ce înseamnă câmpuri magnetice slabe), având în vedere dezvoltarea în serie Mac-Laurin a sinusului hiperbolic,

$$\sinh x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\quad (\forall)x\in\mathbb{R},$$

(care este convergentă pentru orice $x\in\mathbb{R}$), putem aproxima $\sinh x\cong x$ şi atunci, din (48.9) rezultă că în acest caz

$$v_x(z)=v_0\frac{z}{d},$$

adică, în cazul câmpurilor magnetice slabe, viteza creşte liniar pe distanța dintre cele două plane, de la $v_x=0$, pentru $z=0$, la $v_x=v_0$, pentru $z=d$.

Dacă, din contra, câmpurile magnetice sunt puternice, ceea ce este echivalent cu a scrie că $d\gg d_0=\sqrt{\frac{\eta}{\lambda}}\frac{1}{\mu_0 H_0}$, atunci

$$\frac{\sinh\frac{z}{d_0}}{\sinh\frac{d}{d_0}}\cong 0,\quad \frac{\sinh\frac{d-z}{d_0}}{\sinh\frac{d}{d_0}}=\frac{e^{\frac{d-z}{d_0}}-e^{\frac{z-d}{d_0}}}{e^{\frac{d}{d_0}}-e^{-\frac{d}{d_0}}}=\frac{e^{\frac{z}{d_0}}-e^{-\frac{2d-z}{d_0}}}{1-e^{-\frac{2d}{d_0}}}\cong e^{-\frac{z}{d_0}},$$

iar din (48.9) rezultă că în acest caz

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$v_x(z)=\frac{E_0}{\mu_0 H_0}\left(1-e^{-\frac{z}{d_0}}\right)=\frac{E_0}{\mu_0 H_0}\left(1-e^{-\frac{\mu_0 H_0\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\eta}}z}\right),$$

adică în cazul câmpurilor magnetice puternice viteza variază exponențial cu distanța z, măsurată de la planul $z=0$, unde $v_x=0$ (vezi figura 48, în care este reprezentată grafic viteza ca funcție de distanța dintre cele două plane, $v_x=v_x(z)$, pentru cazul particular când $E_0=10^{-3}\ V\cdot m^{-1}$, $H_0=10^4\ A\cdot m^{-1}$, $\lambda=10^4\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$ şi $\eta=10^{-3}N\cdot s\cdot m^{-2}$).

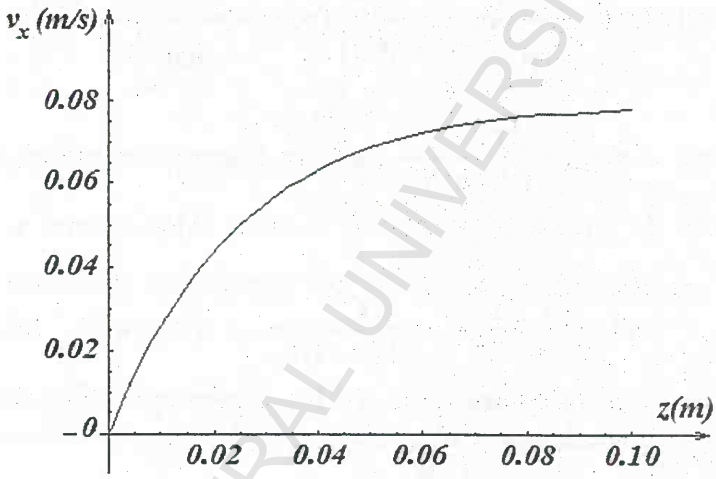


Fig. 48

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

VIII. Dinamică relativistă. Reacții

Problema nr. 49

O particulă cu masa de repaus m_0 se mişcă sub acţiunea unei forţe oarecare, $\vec{F}$. Să se exprime acceleraţia sa, $\vec{a}$, în funcţie de forţă şi de viteză.

Rezolvare

Din relaţia generală

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{49.1}$$

cu

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \vec{v}, \tag{49.2}$$

rezultă

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 \vec{v}) = \gamma m_0 \vec{a} + m_0 \vec{v}\frac{d\gamma}{dt}. \tag{49.3}$$

Dar

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(-\frac{1}{c^2}\right)2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{c^2}\gamma^3(\vec{v}\cdot\vec{a}), \tag{49.4}$$

şi atunci, înlocuind în (49.3), obţinem

$$\vec{F} = \gamma m_0 \vec{a} + \gamma^3 m_0\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}\right)\frac{\vec{v}}{c}. \tag{49.5}$$

Să înmulţim acum scalar relaţia (49.5) cu vectorul $\frac{\vec{v}}{c}$. Obţinem

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{F}=\gamma m_0\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}\right)+\gamma^3 m_0\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}\right)\frac{\vec{v}}{c}\cdot\frac{\vec{v}}{c}=\gamma m_0\left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{c}\right)+\gamma^3 m_0\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}\right)\frac{v^2}{c^2}=$$

$$\gamma m_0\left(\vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{c}\right)+\gamma^3 m_0\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)=\gamma^3 m_0\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}\right).$$

Înlocuind acum pe $\gamma^3 m_0\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}\right)$ din ultima relație în (49.5) rezultă

$$\vec{F}=\gamma m_0\,\vec{a}+\left(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{F}\right)\frac{\vec{v}}{c}, \tag{49.6}$$

sau

$$\gamma m_0\vec{a}=\vec{F}-\left(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{F}\right)\frac{\vec{v}}{c}, \tag{49.7}$$

de unde

$$\vec{a}=\frac{1}{m_0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left[\vec{F}-\left(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\vec{F}\right)\frac{\vec{v}}{c}\right]. \tag{49.8}$$

Această relație arată faptul că, în general, în cadrul mecanicii relativiste, accelerația produsă de o forță oarecare, $\vec{F}$, nu este coliniară cu aceasta, ci este un vector cuprins în planul determinat de vectorii forță și viteză. În plus, accelerația depinde de viteză atât direct, cât și prin intermediul masei, m.

În cazul în care direcția forței este perpendiculară pe direcția vitezei, produsul scalar $\vec{v}\cdot\vec{F}$ este nul și obținem relația newtoniană $\vec{a}_\perp = \frac{\vec{F}_\perp}{m}$, unde $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ se poate defini ca o "masă transversală" a corpului în timpul mișcării.

Dacă forța este paralelă cu viteza corpului, $\vec{F}\parallel\vec{v}$, atunci, notând cu $\hat{v}$ versorul direcției comune a celor doi vectori ($\vec{v}$ și $\vec{F}$) din (49.8) avem

$$\vec{a}=\frac{F}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\hat{v}=\frac{1}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}\vec{F}, \tag{49.9}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică $\vec{a} \parallel \vec{F}$. Prin urmare, în acest caz cei trei vectori sunt coliniari și, în plus, se poate scrie că

$$F_{\parallel} = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} a_{\parallel}, \tag{49.10}$$

relație care permite definirea unei mase „longitudinale", prin

$$m_{\parallel} = \frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}.$$

Problema nr. 50

Să se determine mișcarea unidimensională a unei particule cu masa de repaus m_0, sub acțiunea unei forțe constante, $\vec{F}$.

Rezolvare

Deoarece mișcarea este presupusă unidimensională, în cele ce urmează vom renunța la săgeata aferentă simbolurilor care desemnează mărimile vectoriale. Astfel, vom scrie simplu

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m_0 v\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right]. \tag{50.1}$$

Calculând derivata, rezultă

$$F = \left[m_0 \frac{dv}{dt}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{d}{dt}\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) m_0 v\right] \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left[\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{v^2}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] \times$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{m_0}{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{dv}{dt}=\left[1-\frac{v^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\right]\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dt}=m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}\frac{dv}{dt},$$

adică

$$\frac{F}{m_0}dt=\frac{dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}, \tag{50.2}$$

de unde, prin integrare (cu condiția inițială $v_0=v(t_0=0)=0$)

$$\frac{F}{m_0}\int_{t_0}^{t}dt=\int_0^v\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2}dv. \tag{50.3}$$

Pentru a calcula integrala din membrul drept vom face schimbarea de variabilă: $v=c\sin\varphi \Rightarrow dv=c\cos\varphi\, d\varphi$. Atunci, (50.3) devine

$$\frac{F}{m_0}(t-t_0)=c\int_0^{\arcsin(v/c)}\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi=c\ tg\ \varphi\Big|_0^{\arcsin(v/c)}=c\ tg\left[\arcsin\left(\frac{v}{c}\right)\right]=$$

$$c\frac{\sin\left[\arcsin\left(\frac{v}{c}\right)\right]}{\cos\left[\arcsin\left(\frac{v}{c}\right)\right]}=\frac{v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

sau, ridicând la pătrat și efectuând câteva calcule elementare

$$v^2\left[1+\frac{(F/m_0)^2}{c^2}(t-t_0)^2\right]=(F/m_0)^2(t-t_0)^2,$$

de unde

$$v=\frac{(F/m_0)(t-t_0)}{\sqrt{1+\frac{(F/m_0)^2}{c^2}(t-t_0)^2}}=\frac{dx}{dt}. \tag{50.4}$$

Această relație se mai poate scrie astfel

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$dx = \frac{c^2}{(F/m_0)}\, d\left[\sqrt{1+\frac{(F/m_0)^2}{c^2}(t-t_0)^2}\right],$$

și se integrează imediat (cu condiția inițială $x(t_0=0)=x_0$)

$$x - x_0 = \frac{c^2}{(F/m_0)}\sqrt{1+\frac{(F/m_0)^2}{c^2}(t-t_0)^2}\,. \tag{50.5}$$

Relația (50.5) se poate pune sub forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{\left(\frac{c^2}{F/m_0}\right)^2} - \frac{(t-t_0)^2}{\left(\frac{c}{F/m_0}\right)^2} = 1, \tag{50.6}$$

care ne arată că diagrama spațio-temporală (linia de univers) a mișcării este o hiperbolă. Din acest motiv, mișcarea unidimensională a unei particule sub acțiunea unei forțe constante este numită mișcare hiperbolică. Ea tinde asimptotic către o mișcare uniformă cu viteza c.

În cazul nerelativist, cu aceleași condiții inițiale și $m = m_0 = const.$, avem

$$x - x_0 = \frac{F}{m}\frac{(t-t_0)^2}{2},$$

și, evident, diagrama spațiu-timp corespunzătoare este un arc de parabolă.

Problema nr. 51

Considerând reacția de dezintegrare $A \to B + C$

a) Să se calculeze energia particulei B, E_B, în ipoteza că particula care se dezintegrează este în repaus în sistemul de referință al laboratorului. Se presupun cunoscute masele de repaus ale particulelor, m_A, m_B și m_C, și se consideră sistemul natural de unități (în care $c=1$).

b) Să se arate că energia cinetică T_i a particulei i $(i = B, C)$ în referențialul propriu al particulei ce se dezintegrează este

BCU "AS" CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$T_i = \Delta m\left(1-\frac{m_i}{m_A}-\frac{\Delta m}{2m_A}\right),$$

unde $\Delta m = m_A - m_B - m_C$ este „excesul" de masă sau „valoarea Q" a procesului.

c) Mezonul pi încărcat negativ $\left(m_{\pi^-}=139,6\ MeV\right)$ se dezintegrează într-un miuon negativ $\left(m_{\mu^-}=105,7\ MeV\right)$ şi un antineutrino miuonic, a cărui masă se presupune că este $m_{\bar{\nu}_\mu}\cong 0$. Să se calculeze energiile cinetice ale miuonului şi neutrinului în referenţialul propriu al mezonului pi. Energia cinetică „unică" a miuonului este rezultatul unei dezintegrări biparticulă; acest fapt a jucat un rol important în descoperirea experimentală a mezonului „pi" în emulsiile fotografice, făcută de către Cecil Frank Powell (1903-1969) şi Giuseppe P.S. Occhialini (1907-) în anul 1947.

Rezolvare

Pentru rezolvarea problemei se utilizează legile de conservare ale energiei relativiste şi impulsului relativist.

a) Particula A fiind în repaus, impulsul ei iniţial este nul, $\left|\vec{p}_A^{\,i}\right|=0$. Evident, deoarece după reacţie/interacţiune particula A „dispare", avem şi $\left|\vec{p}_A^{\,f}\right|=0$. Sunt evidente şi relaţiile: $\left|\vec{p}_B^{\,i}\right|=0$ şi $\left|\vec{p}_C^{\,i}\right|=0$. Conservarea impulsului total al sistemului se scrie astfel

$$\vec{p}_A^{\,i}+\vec{p}_B^{\,i}+\vec{p}_C^{\,i}=\vec{p}_A^{\,f}+\vec{p}_B^{\,f}+\vec{p}_C^{\,f} \Leftrightarrow 0=\vec{p}_B^{\,f}+\vec{p}_C^{\,f} \Rightarrow \vec{p}_B^{\,f}=-\vec{p}_C^{\,f} \Rightarrow \left|\vec{p}_B^{\,f}\right|=\left|\vec{p}_C^{\,f}\right|. \tag{51.1}$$

Grafic, conservarea impulsului se poate reprezenta ca în figura 51. Direcţia comună a celor două impulsuri, $\vec{p}_C^{\,f}$ şi $\vec{p}_C^{\,f}$ poate fi oricare.

Legea conservării energiei în reacţie se exprimă prin

$$E_A^i+E_B^i+E_C^i=E_A^f+E_B^f+E_C^f,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $E_A^i\left(=m_Ac^2\right)=m_A$ (particula A este inițial în repaus), $E_B^i=0$, $E_C^i=0$, $E_A^f=0$, $\left(E_B^f\right)^2\left(=m_B^2c^4+\left(p_B^f\right)^2c^2\right)=m_B^2+\left(p_B^f\right)^2$ și $\left(E_C^f\right)^2\left[=m_C^2c^4+\left(p_C^f\right)^2\times c^2\right]=m_C^2+\left(p_C^f\right)^2$, unde între paranteze a fost scrisă forma corespunzătoare sistemului de unități LMT[1] a relațiilor respective. Atunci, legea conservării energiei devine

$$m_A=E_B^f+\sqrt{m_C^2+\left(p_C^f\right)^2}\,. \tag{51.2}$$

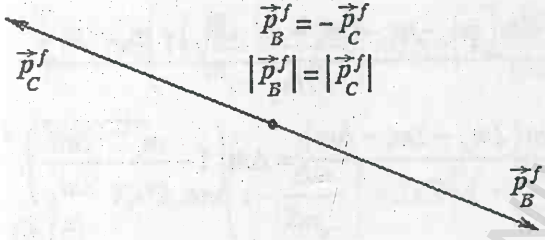


Fig. 51.

Din (51.1) și (51.2) avem

$$m_A=E_B^f+\sqrt{m_C^2+\left(p_B^f\right)^2}=E_B^f+\sqrt{m_C^2+\left(E_B^f\right)^2-m_B^2}\,,$$

sau

$$m_A-E_B^f=\sqrt{m_C^2+\left(E_B^f\right)^2-m_B^2}\,,$$

care, prin ridicare la pătrat, conduce la

$$m_A^2+\left(E_B^f\right)^2-2m_AE_B^f=m_C^2+\left(E_B^f\right)^2-m_B^2,$$

de unde

$$E_B^f=\frac{m_A^2+m_B^2-m_C^2}{2m_A}. \tag{51.3}$$

În mod cu totul analog se arată că energia totală a particulei C se scrie la fel ca cea corespunzătoare particulei B, în care trebuie făcută schimbarea $B\leftrightarrow C$

$$E_C^f=\frac{m_A^2+m_C^2-m_B^2}{2m_A}. \tag{51.4}$$

[1] Trecerea de la sistemul de dimensiuni fundamentale LSV (lungime, acțiune, viteză) la sistemul LMT (lungime, masă, timp) se face prin relațiile $L=L$; $S=ML^2T^{-1}$; $V=LT^{-1}$, iar trecerea inversă prin relațiile $L=L$; $M=SL^{-1}V^{-1}$; $T=LV^{-1}$.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) În cadrul mecanicii relativiste, energia cinetică a unei particule se defineşte ca diferenţa dintre energia totală şi energia de repaus a particulei

$$T_i = E_i - m_i . \tag{51.5}$$

Ţinând seama de relaţiile (51.3) şi/sau (51.4), expresia energiei cinetice a particulei i dată de relaţia (51.5) se poate scrie succesiv

$$T_i = E_i - m_i = \frac{m_A^2 + m_i^2 - m_j^2}{2m_A} - m_i = \frac{m_A^2 + m_i^2 - m_j^2 - 2m_A m_i}{2m_A} =$$

$$\frac{\left(m_A^2 - 2m_A m_i + m_i^2\right) - m_j^2}{2m_A} = \frac{\left(m_A - m_i\right)^2 - m_j^2}{2m_A} = \frac{\left(m_A - m_i - m_j\right)\left(m_A - m_i + m_j\right)}{2m_A} =$$

$$\frac{\Delta m\left(m_A - m_i + m_j\right)}{2m_A} = \frac{\Delta m\left[m_A - m_i - \left(m_A - m_i - m_j\right) + m_A - m_i\right]}{2m_A} =$$

$$\frac{\Delta m\left(2m_A - 2m_i - \Delta m\right)}{2m_A} = \Delta m\left(1 - \frac{m_i}{m_A} - \frac{\Delta m}{2m_A}\right), \tag{51.6}$$

adică ceea ce era de demonstrat. În cursul calculelor din (51.6) s-a folosit definiţia „excesului" de masă, $\Delta m = m_A - m_i - m_j$, unde $j = C$ dacă $i = B$ şi $j = B$ dacă $i = C$, aceste „valori" ale indicilor i şi j fiind valabile peste tot acolo unde apar în (51.6). În plus, se observă faptul că suma energiilor cinetice ale celor doi „produşi" de reacţie este chiar „excesul" de masă: $T_B + T_C = \Delta m$, relaţie care rezultă şi direct, din definiţia energiei cinetice

$$T_B + T_C = \left(E_B - m_B\right) + \left(E_C - m_C\right) = \left(E_B + E_C\right) - m_B - m_C =$$

$$E_A - m_B - m_C \overset{\vec{p}_A = 0}{=} m_A - m_B - m_C \equiv \Delta m.$$

c) Reacţia nucleară de dezintegrare a mezonului pi minus se scrie astfel

$$\begin{array}{ccccc} \pi^- & \rightarrow & \mu^- & + & \overline{\nu}_\mu \\ & & \downarrow & & \\ & & e^- & + \nu_\mu + & \overline{\nu}_e \end{array}$$

Conform relaţiei (51.6), energia cinetică a miuonului negativ este

BCUIASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$T_{\mu^-} = \Delta m\left(1-\frac{m_{\mu^-}}{m_{\pi^-}}-\frac{\Delta m}{2m_{\pi^-}}\right), \tag{51.7}$$

iar cea a antineutrinului miuonic este

$$T_{\bar{\nu}_\mu} = \Delta m\left(1-\frac{m_{\bar{\nu}_\mu}}{m_{\pi^-}}-\frac{\Delta m}{2m_{\pi^-}}\right) \cong \Delta m\left(1-\frac{\Delta m}{2m_{\pi^-}}\right), \tag{51.8}$$

unde $\Delta m = m_{\pi^-} - m_{\mu^-} - m_{\bar{\nu}_\mu} \cong m_{\pi^-} - m_{\mu^-} = (139,6-105,7)\,MeV = 33,9\,MeV$.

Calculele numerice dau următoarele valori pentru energia cinetică a celor două particule

$$T_{\mu^-} = \Delta m\left(1-\frac{m_{\mu^-}}{m_{\pi^-}}-\frac{\Delta m}{2m_{\pi^-}}\right) = 33,9\left(1-\frac{105,7}{139,6}-\frac{33,9}{279,2}\right)MeV \cong 4,116\,MeV$$

și respectiv

$$T_{\bar{\nu}_\mu} \cong \Delta m\left(1-\frac{\Delta m}{2m_{\pi^-}}\right) = 33,9\left(1-\frac{33,9}{279,2}\right)MeV \cong 29,784\,MeV,$$

verificându-se relația $T_B + T_C = \Delta m$, care, în acest caz se scrie $T_{\mu^-} + T_{\bar{\nu}_\mu} =$ $= (4,116+29,784)\,MeV = 33,9\,MeV = \Delta m$.

Problema nr. 52

Să se determine relația dintre unghiul θ sub care este împrăștiată particula B – pe de o parte – și masele și energiile particulelor – pe de altă parte – știind că particula inițială, A, se dezintegrează în mișcare prin reacția $A \to B + C$. Masele de repaus ale tuturor particulelor se vor considera cunoscute și se va utiliza sistemul natural de unități (în care viteza luminii în vid este egală cu unitatea, $c = 1$).

Rezolvare

Deoarece toate particulele implicate în reacție sunt în mișcare (dezintegrarea are loc cu particula inițială, A, în mișcare), se poate scrie că

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$\left(E_A^i\right)^2\left[=m_A^2c^4+\left(p_A^i\right)^2c^2\right]=m_A^2+\left(p_A^i\right)^2$, $E_A^f=0$, $E_B^i=0,\left(E_B^f\right)^2\left[=m_B^2c^4+\right.$

$\left.\left(p_B^f\right)^2c^2\right]=m_B^2+\left(p_B^f\right)^2$, $E_C^i=0$, $\left(E_C^f\right)^2\left[=m_C^2c^4+\left(p_C^f\right)^2c^2\right]=m_C^2+\left(p_C^f\right)^2$,

unde indicele "i" se referă la starea inițială (imediat înainte de reacție), iar "f" la starea finală (imediat după dezintegrare). În ceea ce privește impulsurile particulelor înainte și după dezintegrarea particulei A, ținând seama de datele problemei, se poate scrie că $\vec{p}_B^{\,i}=0$, $\vec{p}_C^{\,i}=0$ și $\vec{p}_A^{\,f}=0$. Relațiile dintre celelalte impulsuri, $\vec{p}_A^{\,i}\neq 0$, $\vec{p}_B^{\,f}\neq 0$ și $\vec{p}_C^{\,f}\neq 0$, pot fi obținute corect din reprezentarea grafică a legii conservării impulsului în procesul studiat, care este dată în figura 52, unde, fără a restrânge generalitatea problemei, s-a considerat direcția impulsului particulei inițiale orizontală.

Problema se rezolvă simplu, apelând la legile de conservare ale impulsului relativist și energiei relativiste

$$\vec{p}_A^{\,i}+\vec{p}_B^{\,i}+\vec{p}_C^{\,i}=\vec{p}_A^{\,f}+\vec{p}_B^{\,f}+\vec{p}_C^{\,f}, \tag{52.1}$$

$$E_A^i+E_B^i+E_C^i=E_A^f+E_B^f+E_C^f, \tag{52.2}$$

Ținând seama de datele problemei, exprimate prin relațiile scrise anterior, cele două legi (52.1) și (52.2) devin

$$\vec{p}_A^{\,i}=\vec{p}_B^{\,f}+\vec{p}_C^{\,f}, \tag{52.3}$$

$$E_A^i=E_B^f+E_C^f. \tag{52.4}$$

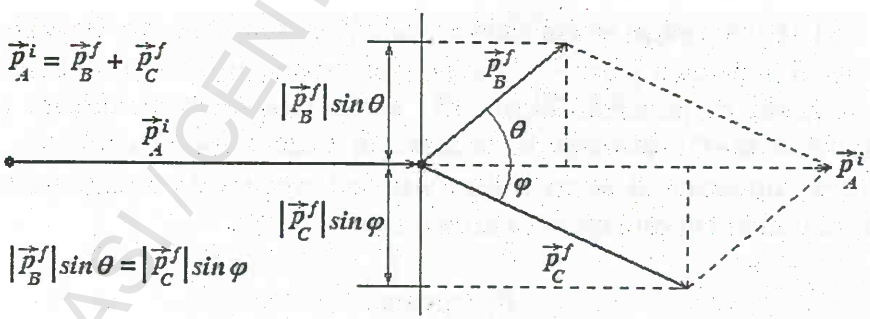


Fig. 52

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Proiectând relația vectorială (52.3) pe direcția impulsului inițial al particulei A și pe direcția perpendiculară la aceasta, se obține

$$\begin{cases} \left|\vec{p}_A^{\,i}\right| = \left|\vec{p}_B^{\,f}\right|\cos\theta + \left|\vec{p}_C^{\,f}\right|\cos\varphi, \\ \left|\vec{p}_B^{\,f}\right|\sin\theta = \left|\vec{p}_C^{\,f}\right|\sin\varphi, \end{cases}$$

sau, într-o scriere mai simplă

$$\begin{cases} p_A^i = p_B^f\cos\theta + p_C^f\cos\varphi, \\ p_B^f\sin\theta = p_C^f\sin\varphi, \end{cases} \tag{52.5}$$

unde notațiile sunt evidente. Exprimând $\cos\varphi$ din prima relație a sistemului (52.5), ridicându-l la pătrat și adunându-l cu pătratul lui $\sin\varphi$ exprimat din cea de-a doua relație a aceluiași sistem, rezultă

$$\left(p_C^f\right)^2 = \left(p_A^i\right)^2 + \left(p_B^f\right)^2 - 2p_A^i p_B^f\cos\theta,$$

de unde se obține o primă formă a lui $\cos\theta$, adică cerința problemei

$$\cos\theta = \left(2p_A^i p_B^f\right)^{-1}\left[\left(p_A^i\right)^2 + \left(p_B^f\right)^2 - \left(p_C^f\right)^2\right]. \tag{52.6}$$

Pe de altă parte, din legea conservării energiei relativiste a sistemului avem

$$E_C^f = E_A^i - E_B^f,$$

care, ridicată la pătrat, conduce la

$$\left(E_C^f\right)^2\left[= m_C^2 + \left(p_C^f\right)^2\right] = \left(E_A^i\right)^2 + \left(E_B^f\right)^2 - 2E_A^i E_B^f,$$

de unde, pentru impulsul final al particulei C se obține expresia

$$\left(p_C^f\right)^2 = \left(E_A^i\right)^2 + \left(E_B^f\right)^2 - 2E_A^i E_B^f - m_C^2. \tag{52.7}$$

Introducând $\left(p_C^f\right)^2$ din (52.7) în (52.6) rezultă, în fine,

$$\cos\theta = \frac{\left(p_A^i\right)^2 + \left(p_B^f\right)^2 - \left(p_C^f\right)^2}{2p_A^i p_B^f} =$$

$$\frac{\left(p_A^i\right)^2 + \left(p_B^f\right)^2 - \left(E_A^i\right)^2 - \left(E_B^f\right)^2 + 2E_A^i E_B^f + m_C^2}{2p_A^i p_B^f} =$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{\left(E_A^i\right)^2 - m_A^2 + \left(E_B^i\right)^2 - m_B^2 - \left(E_A^i\right)^2 - \left(E_B^f\right)^2 + 2E_A^i E_B^f + m_C^2}{2\sqrt{\left[\left(E_A^i\right)^2 - m_A^2\right]\left[\left(E_B^i\right)^2 - m_B^2\right]}} = \frac{m_C^2 - m_A^2 - m_B^2 + 2E_A^i E_B^f}{2\sqrt{\left[\left(E_A^i\right)^2 - m_A^2\right]\left[\left(E_B^i\right)^2 - m_B^2\right]}}. \quad (52.8)$$

Problema nr. 53

Particula lambda zero $\left(\Lambda^0\right)$ este un barion neutru de masă $M \cong 1115\ MeV$ (se consideră sistemul natural de unități, în care $c=1$) care se dezintegrează într-un proton de masă $m_p \cong 939\ MeV$ şi un mezon „pi minus" (pion negativ) de masă $m_{\pi^-} \cong 140\ MeV$, având viața medie $\tau_\Lambda = 2{,}6 \cdot 10^{-10} s$. Acest barion a fost observat mai întâi în zbor prin modul său caracteristic de dezintegrare în particule încărcate electric $\Lambda^0 \to p + \pi^-$ în camerele cu ceață. Urmele lăsate de particulele încărcate electric ce rezultă din dezintegrare pornesc dintr-un singur punct şi seamănă foarte mult cu un „V" întors, sau cu litera grecească lambda. De altfel, acesta este şi motivul pentru care această particulă a primit numele de barionul „lambda" zero. Identitatea particulelor şi impulsurile acestora pot fi deduse din lungimea traseelor şi din curbura acestora în câmpul magnetic al camerei cu ceață.

a) Folosind conservarea impulsului şi a energiei să se arate că, dacă unghiul de deschidere ϑ dintre cele . două urme cvasirectilinii este determinat prin măsurare, atunci masa particulei ce se dezintegrează (a barionului lambda zero) poate fi obținută cu ajutorul formulei

$$M_{\Lambda^0}^2 = m_p^2 + m_{\pi^-}^2 + 2E_p E_{\pi^-} - 2p_p p_{\pi^-} \cos\vartheta,$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde p_p și p_{π^-} sunt mărimile impulsurilor tridimensionale ale celor două particule ce rezultă în urma dezintegrării, iar E_p și respectiv E_{π^-} sunt energiile lor totale.

b) În acoperișul unei camere cu ceață este creată o particulă lambda zero cu energia totală de $10\ GeV$ ca urmare a unei ciocniri. Cât de departe va călători aceasta în cameră înainte de a se dezintegra?

Rezolvare

Fiind neutri din punct de vedere electric, barionii lambda zero nu lasă urme în camera cu ceață (camera Wilson). Particulele rezultate în urma dezintegrării fiind încărcate electric lasă astfel de urme, ce apar, așa cum este precizat și în enunțul problemei, sub forma unei litere lambda din alfabetul grec. În figura 53.1 această „diagramă" de dezintegrare este reprezentată ca făcând parte dintr-o diagramă mult mai complexă, ce pune în evidență (pentru prima dată) o particulă descoperită foarte recent și „botezată" barionul „dublu-straniu" *omega b minus*. În această diagramă, cu verde este reprezentat traseul protonului și cu roșu traseul pionului negativ ce rezultă prin dezintegrarea barionului neutru lambda. Traseul acestuia din urmă este reprezentat cu o linie subțire punctată pentru a indica faptul că această parte a „diagramei" de dezintegrare nu se observă în camera cu ceață.

După cum se observă în figura 53.1, particula lambda zero rezultă (împreună cu kaonul negativ – mezonul K^-) din dezintegrarea barionului omega minus, particulă alcătuită din trei quarci s („strange") și considerată ca fiind prima dovadă de necontestat a existenței cu adevărat a quarcilor, fiind pusă pentru prima dată în evidență cu ajutorul camerei cu bule de la Brookhaven National Laboratory, în anul 1964. Cu mult mai „stranie" este însă particula „omega b minus" (barionul Ω_b^-), descoperită în cadrul experimentului DZero cu ajutorul Tevatronului de la Fermilab, după cum relatează ziarul ScienceDaily din 4 septembrie 2008 (pentru amănunte vezi http://www.sciencedaily.com/releases/2008/09/080903172201.htm).

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Odată produsă, particula *omega b minus* se dezintegrează ca un „foc de artificii" după un parcurs în camera cu ceaţă de aproximativ un milimetru. Mai întâi ea se „desface" în două particule intermediare numite *J/Psi* şi omega minus. Imediat după aceea particula *J/Psi* se dezintegrează în doi miuoni cu sarcini electrice diferite, iar barionul omega minus poate parcurge un traseu de câţiva centimetri, după care se dezintegrează şi el într-o altă particulă instabilă, barionul lambda zero şi un kaon negativ (mezonul K^-), care are o viaţă mult mai lungă în comparaţie cu toate particulele „apărute" până acum. La rândul lui, barionul lambda zero, care este lipsit de sarcină electrică, poate să parcurgă o distanţă de câţiva centimetri înainte de a se dezintegra într-un proton şi un pion negativ (mezonul π^-).

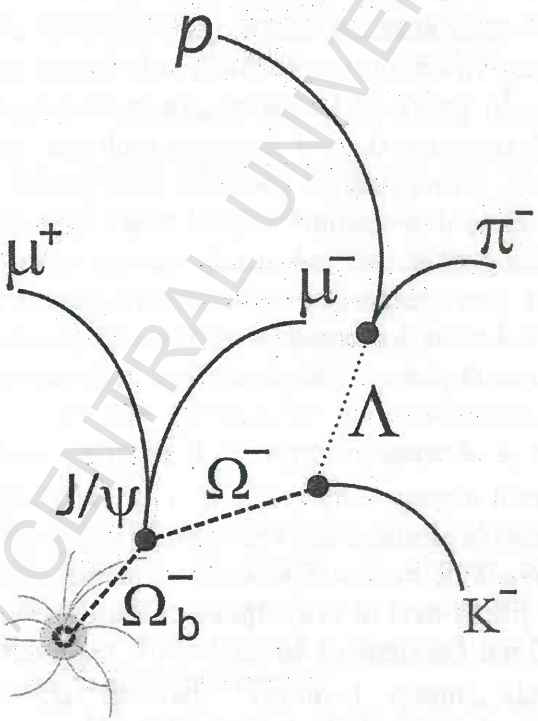


Fig. 53.1

a) Pentru a demonstra formula cu ajutorul căreia poate fi obţinută masa particulei lambda zero vom apela, aşa cum de altfel se indică în

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

enunțul problemei, la legea de conservare a cuardiimpulsului în procesul analizat, scrisă separat pentru partea spațială şi respectiv temporală a acesteia.

Cu notațiile din figura 53.2, partea spațială a legii de conservare a cuadriimpulsului se scrie astfel

$$\vec{p}^{\,i}_{\Lambda^0} + \vec{p}^{\,i}_{p} + \vec{p}^{\,i}_{\pi^-} = \vec{p}^{\,f}_{\Lambda^0} + \vec{p}^{\,f}_{p} + \vec{p}^{\,f}_{\pi^-}, \qquad (53.1)$$

unde indicele „i" desemnează starea inițială, iar indicele „f" pe cea finală.

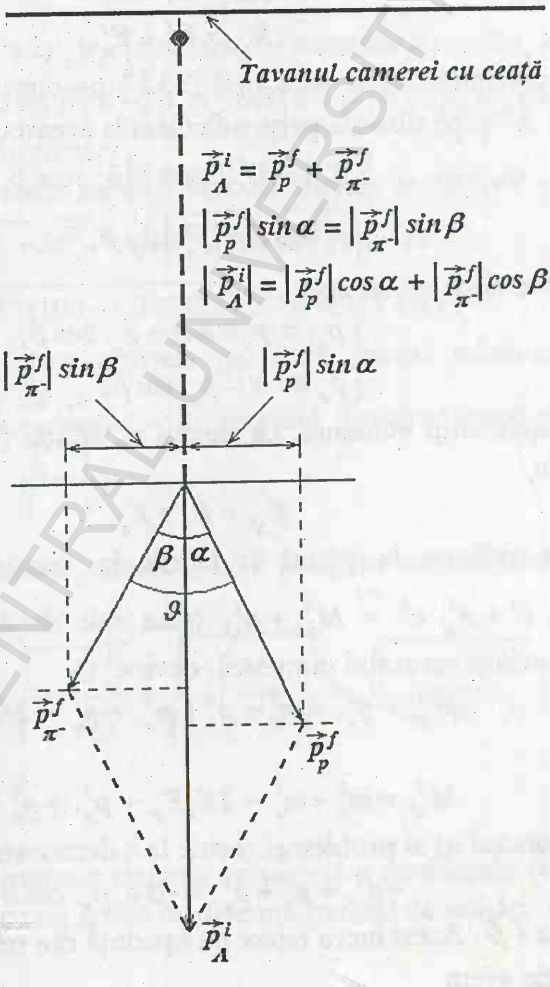


Fig. 53.2

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Partea temporală a aceleiaşi legi de conservare (în fapt legea conservării energiei totale relativiste) se scrie

$$E^i_{\Lambda^0} + E^i_p + E^i_{\pi^-} = E^f_{\Lambda^0} + E^f_p + E^f_{\pi^-}. \qquad (53.2)$$

În relaţiile de mai sus $\vec{p}^{\,i}_p = 0$, $\vec{p}^{\,i}_{\pi^-} = 0$, $\vec{p}^{\,f}_{\Lambda^0} = 0$ şi la fel pentru energii: $E^i_p = 0$, $E^i_{\pi^-} = 0$ şi $E^f_{\Lambda^0} = 0$, astfel că relaţiile (53.1) şi (53.2) capătă forma mai simplă

$$\vec{p}^{\,i}_{\Lambda^0} = \vec{p}^{\,f}_p + \vec{p}^{\,f}_{\pi^-}, \qquad (53.1')$$

$$E^i_{\Lambda^0} = E^f_p + E^f_{\pi^-}. \qquad (53.2')$$

Proiectând relaţia vectorială (53.1') pe direcţia impulsului iniţial al particulei Λ^0 şi pe direcţia perpendiculară la aceasta, se obţine

$$\begin{cases} \left|\vec{p}^{\,i}_{\Lambda^0}\right| = \left|\vec{p}^{\,f}_p\right|\cos\alpha + \left|\vec{p}^{\,f}_{\pi^-}\right|\cos\beta, \\ \left|\vec{p}^{\,f}_p\right|\sin\alpha = \left|\vec{p}^{\,f}_{\pi^-}\right|\sin\beta, \end{cases}$$

sau, într-o scriere mai simplă

$$\begin{cases} p_{\Lambda^0} = p_p\cos\alpha + p_{\pi^-}\cos\beta, \\ p_p\sin\alpha = p_{\pi^-}\sin\beta, \end{cases} \qquad (53.3)$$

unde notaţiile sunt evidente. La rândul ei, relaţia (53.2') se poate rescrie mai simplu

$$E_{\Lambda^0} = E_p + E_{\pi^-}, \qquad (53.4)$$

care, prin ridicare la pătrat şi luarea în consideraţie a faptului că $E^2_{\Lambda^0} = M^2_{\Lambda^0}c^4 + p^2_{\Lambda^0}c^2 \overset{c=1}{=} M^2_{\Lambda^0} + p^2_{\Lambda^0}$ (plus cele două relaţii analoge scrise pentru proton şi mezonul pi minus), devine

$$M^2_{\Lambda^0} + p^2_{\Lambda^0} = m^2_p + p^2_p + m^2_{\pi^-} + p^2_{\pi^-} + 2E_pE_{\pi^-},$$

de unde

$$M^2_{\Lambda^0} = m^2_p + m^2_{\pi^-} + 2E_pE_{\pi^-} - p^2_{\Lambda^0} + p^2_p + p^2_{\pi^-}$$

şi astfel, punctul **a)** al problemei revine la a demonstra faptul că

$$-p^2_{\Lambda^0} + p^2_p + p^2_{\pi^-} = -2p_pp_{\pi^-}\cos\vartheta,$$

unde $\vartheta = \alpha + \beta$. Acest lucru reiese cu uşurinţă din relaţiile (53.3) astfel: din prima relaţie avem

$$p^2_{\Lambda^0} = p^2_p\cos^2\alpha + p^2_{\pi^-}\cos^2\beta + 2p_pp_{\pi^-}\cos\alpha\cos\beta$$

BCUIASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi atunci

$$-p_{\Lambda^0}^2+p_p^2+p_{\pi^-}^2=-p_p^2\cos^2\alpha-p_{\pi^-}^2\cos^2\beta-2p_pp_{\pi^-}\cos\alpha\cos\beta+p_p^2+p_{\pi^-}^2,$$

sau

$$-p_{\Lambda^0}^2+p_p^2+p_{\pi^-}^2=p_p^2\sin^2\alpha+p_{\pi^-}^2\sin^2\beta-2p_pp_{\pi^-}\cos\alpha\cos\beta,$$

iar de aici

$$-p_{\Lambda^0}^2+p_p^2+p_{\pi^-}^2=(p_p\sin\alpha)\underbrace{(p_p\sin\alpha)}_{\overset{(53.3-2)}{=p_{\pi^-}\sin\beta}}+(p_{\pi^-}\sin\beta)\underbrace{(p_{\pi^-}\sin\beta)}_{\overset{(53.3-2)}{=p_p\sin\alpha}}-$$

$$2p_pp_{\pi^-}\cos\alpha\cos\beta=2p_pp_{\pi^-}(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)=-2p_pp_{\pi^-}\times$$

$$(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=-2p_pp_{\pi^-}\cos(\alpha+\beta)=-2p_pp_{\pi^-}\cos\vartheta,$$

adică ceea ce era de demonstrat.

b) Impulsul particulei lambda zero cu energia de 10 *GeV* este

$$p_{\Lambda^0}=\sqrt{E_{\Lambda^0}^2-M_{\Lambda^0}^2}=\sqrt{10^{20}-(1{,}115)^2\cdot10^{18}}\ eV=$$
$$\sqrt{10^{18}(100-1{,}243225)}\ eV=9{,}937\ GeV, \tag{53.5}$$

ceea ce înseamnă că viteza acesteia [pe baza relației relativiste dintre impuls şi viteză, $p_{\Lambda^0}=\dfrac{M_{\Lambda^0}v_{\Lambda^0}}{\sqrt{1-\dfrac{v_{\Lambda^0}^2}{c^2}}}$ – în sistemul (lungime-masă-timp), sau

$p_{\Lambda^0}=\dfrac{M_{\Lambda^0}v_{\Lambda^0}}{\sqrt{1-v_{\Lambda^0}^2}}$ – în sistemul „natural", LSV (lungime-acțiune-viteză)] este

$$v_{\Lambda^0}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{M_{\Lambda^0}}{p_{\Lambda^0}}\right)^2}}=\sqrt{1-\frac{M_{\Lambda^0}^2}{E_{\Lambda^0}^2}}=\sqrt{1-\left(\frac{M_{\Lambda^0}}{E_{\Lambda^0}}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1{,}115}{10}\right)^2}\cong0.994, \tag{53.6}$$

valoare care, evident, impune tratarea relativistă a problemei (viteza este foarte apropiată de valoarea limită în sistemul natural de unități, $v=1$).

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Ca o observație, precizăm faptul că viteza particulei poate fi dedusă și din relația relativistă dintre impuls și viteză, $p_{\Lambda^0} = \frac{E_{\Lambda^0}}{c^2} v_{\Lambda^0}$ – în sistemul LMT – sau, $p_{\Lambda^0} = E_{\Lambda^0} v_{\Lambda^0}$ – în sistemul natural de unități. Într-adevăr, în acest caz se (re)obține:

$$v_{\Lambda^0} = \frac{p_{\Lambda^0}}{E_{\Lambda^0}} = \frac{\sqrt{E_{\Lambda^0}^2 - M_{\Lambda^0}^2}}{E_{\Lambda^0}} = \sqrt{1 - \frac{M_{\Lambda^0}^2}{E_{\Lambda^0}^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1{,}115}{10}\right)^2} \cong 0{,}994 \left(= 0{,}994\ c = 2{,}982 \cdot 10^8\ m \cdot s^{-1}\right).$$

Având în vedere faptul că timpul mediu de viață al unei particule este raportat întotdeauna în sistemul de referință propriu (în care particula este în repaus), rezultă că particula însăși joacă rol de „origine" a referențialului inerțial S', care se deplasează față de referențialul inerțial al laboratorului, S_{lab}, cu viteza v_{Λ^0}. Ținând seama de efectul relativist al dilatării duratei temporale atunci când se trece de la referențialul inerțial propriu, S', la orice alt referențial inerțial S, urmează că, în referențialul laboratorului, S_{lab}, din momentul creării și până în momentul dezintegrării, particula lambda zero parcurge distanța

$$d_{\Lambda^0}^{(RIS_{lab})} = \left(v_{\Lambda^0} t_{\Lambda^0}\right)^{(RIS_{lab})} = \sqrt{1 - \left(\frac{M_{\Lambda^0}}{E_{\Lambda^0}}\right)^2} \frac{\tau_{\Lambda^0}}{\sqrt{1 - v_{\Lambda^0}^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{M_{\Lambda^0}}{E_{\Lambda^0}}\right)^2} \frac{\tau_{\Lambda^0}}{\sqrt{\left(\frac{M_{\Lambda^0}}{E_{\Lambda^0}}\right)^2}} =$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{M_{\Lambda^0}}{E_{\Lambda^0}}\right)^2} \frac{E_{\Lambda^0}}{M_{\Lambda^0}} \tau_{\Lambda^0} = \sqrt{1 - \left(\frac{1{,}115}{10}\right)^2} \cdot \frac{10}{1{,}115} \cdot 2{,}6 \cdot 10^{-10} s = 23{,}173 \cdot 10^{-10} s \left(= 69{,}519 \cdot 10^{-2} m = 69{,}519\ cm\right).$$

(53.7)

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

IX. RELAȚIILE DE TRANSFORMARE A CÎMPURILOR

Problema nr. 54

Să se arate că, dacă deplasarea relativă a referențialelor inerțiale S și S' are loc într-o direcție oarecare, de versor $\vec{v}_o$ (versorul vitezei $\vec{v}$), legile de transformare ale componentelor câmpului electromagnetic $\vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt

$$\begin{cases} \vec{E}' = (1-\beta)\left(\vec{E}\cdot\vec{v}_0\right)\vec{v}_0 + \beta\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right); \\ \vec{B}' = (1-\beta)\left(\vec{B}\cdot\vec{v}_0\right)\vec{v}_0 + \beta\left(\vec{B}-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}\right), \end{cases} \tag{54.1}$$

unde β este inversul radicalului relativist $\beta = \left(1-v^2/c^2\right)^{-1/2}$.

Rezolvare

Pentru început, vom scrie matricea transformării Lorentz-Herglotz

$$\vec{r}' = \vec{r} + (\beta-1)(\vec{r}\cdot\vec{v}_0)\vec{v}_0 - \beta\vec{v}\,t, \tag{54.2}$$

care este

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1+(\beta-1)\alpha_1^2 & (\beta-1)\alpha_1\alpha_2 & (\beta-1)\alpha_1\alpha_3 & -\frac{v}{c}\beta\alpha_1 \\ (\beta-1)\alpha_2\alpha_1 & 1+(\beta-1)\alpha_2^2 & (\beta-1)\alpha_2\alpha_3 & -\frac{v}{c}\beta\alpha_2 \\ (\beta-1)\alpha_3\alpha_1 & (\beta-1)\alpha_3\alpha_2 & 1+(\beta-1)\alpha_3^2 & -\frac{v}{c}\beta\alpha_3 \\ -\frac{v}{c}\beta\alpha_1 & -\frac{v}{c}\beta\alpha_2 & -\frac{v}{c}\beta\alpha_3 & \beta \end{pmatrix} \tag{54.3}$$

unde α_1, α_2 și α_3 sunt cosinusurile directoare ale direcției definite de versorul $\vec{v}_0 = \vec{v}/|\vec{v}|$. În continuare, vom dezvolta legea de transformare a tensorului câmp electromagnetic F^{ik}:

$$F'^{ik} = \overline{x}_l^i\,\overline{x}_m^k\,F^{lm}. \tag{54.4}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Alegând, de pildă, $i=1$ şi $k=2$, avem

$$F'^{12}=\overline{x}_l^1\overline{x}_m^2F^{lm}=$$
$$(\overline{x}_1^1\overline{x}_2^2-\overline{x}_2^1\overline{x}_1^2)F^{12}+(\overline{x}_1^1\overline{x}_3^2-\overline{x}_3^1\overline{x}_1^2)F^{13}+(\overline{x}_1^1\overline{x}_4^2-\overline{x}_4^1\overline{x}_1^2)F^{14}+$$
$$(\overline{x}_2^1\overline{x}_3^2-\overline{x}_3^1\overline{x}_2^2)F^{23}+(\overline{x}_2^1\overline{x}_4^2-\overline{x}_4^1x_2^2)F^{24}+(\overline{x}_3^1\overline{x}_4^2-\overline{x}_4^1\overline{x}_3^2)F^{34}\ .$$

Utilizând matricea (54.3), după unele reduceri de termeni obţinem

$$F'^{12}=[1+(\beta-1)(\alpha_1^2+\alpha_2^2)]F^{12}+(\beta-1)\alpha_2\alpha_3F^{13}-$$
$$(\beta-1)\alpha_1\alpha_3F^{23}+\frac{v}{c}\beta(\alpha_1F^{24}-\alpha_2F^{14}).$$

Prin urmare, dacă ţinem seama de semnificaţia componentelor lui F^{ik} şi grupăm termenii, avem

$$B'_z=B'_3=(1-\beta)(\vec{B}\cdot\vec{v}_0)\alpha_3+\beta\left(\vec{B}-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}\right)_3,$$

care este componenta după direcţia z a relaţiei $\vec{B}'=(1-\beta)(\vec{B}\cdot\vec{v}_0)\vec{v}_0+\beta\left(\vec{B}-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}\right)$.

Celelalte componente ale lui $\vec{B}$, precum şi componentele lui $\vec{E}$, se deduc în mod cu totul asemănător.

Problema nr. 55

Dacă într-un sistem inerţial fix intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ şi inducţia câmpului magnetic $\vec{B}$ sunt ortogonale şi nu sunt egale în modul,

a) să se determine viteza $\vec{v}_B$ a unui sistem de referinţă inerţial în care nu există decât câmp magnetic;

b) să se determine viteza $\vec{v}_E$ a unui sistem de referinţă inerţial în care nu există decât câmp electric.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Rezolvare

Dacă deplasarea relativă a reperelor S şi S' are loc cu viteza relativă $\vec{v}$, într-o direcție oarecare, de versor $\hat{v}=\vec{v}/v$, unde $v=|\vec{v}|$, atunci relațiile (generale) de transformare ale câmpurilor sunt (vezi problema precedentă)

$$\begin{aligned}\vec{E}'&=(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}}{v^2}+\beta(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}),\\ \vec{B}'&=(1-\beta)(\vec{B}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}}{v^2}+\beta\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right),\end{aligned}\tag{55.1}$$

unde $\beta=\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ este inversul radicalului relativist.

a) Pentru ca în referențialul inerțial S' să existe doar câmp magnetic, trebuie, evident, să nu existe şi câmp electric, adică $\vec{E}'=0$, care în acord cu (55.1, 1) se scrie

$$(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}}{v^2}+\beta(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})=0.\tag{55.2}$$

Presupunându-l pe S fix, cerința punctului **a)** al problemei revine la a determina viteza relativă $\vec{v}$ (care acum va fi viteza referențialului S') care satisface condiția (55.2). Înmulțind scalar această relație cu vectorul $\vec{B}$ şi ținând cont de ipoteza problemei conform căreia $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$, se obține

$$\begin{aligned}&(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\cdot\vec{B}}{v^2}+\beta\vec{B}\cdot(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})=0 \overset{\vec{E}\cdot\vec{B}=0}{\Rightarrow}\\ &(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\cdot\vec{B}}{v^2}+\beta\vec{B}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})=0,\end{aligned}\tag{55.3}$$

care, ținând cont că $\vec{B}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})=0$ (produsul mixt în care apar cel puțin doi vectori coliniari este nul), devine

$$\frac{(1-\beta)}{v^2}(\vec{E}\cdot\vec{v})(\vec{v}\cdot\vec{B})=0,$$

condiție care, excluzând cazul în care $\beta=1$ (ceea ce ar însemna că $v=|\vec{v}|=c$), din punct de vedere matematic poate avea loc atunci când

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

i) $\vec{v}\cdot\vec{E}=0$ şi $\vec{v}\cdot\vec{B}\neq 0$, sau

ii) $\vec{v}\cdot\vec{B}=0$ şi $\vec{v}\cdot\vec{E}\neq 0$, sau

iii) $\vec{v}\cdot\vec{E}=0$ şi $\vec{v}\cdot\vec{B}=0$.

În cazul **i)** viteza $\vec{v}$ trebuie să fie de forma $\vec{v}=\lambda\vec{n}$, cu $\vec{n}\cdot\vec{E}=0$, adică $\vec{n}$ trebuie să fie un vector unitar (versor) situat în planul perpendicular pe direcţia intensităţii câmpului electric $\vec{E}$: $\vec{n}\perp\vec{E}$ şi totodată în acelaşi plan şi făcând un unghi diferit de $\pi/2$ cu vectorul $\vec{B}$. În această situaţie, problema revine la a-l determina pe λ, întrucât direcţia şi sensul vitezei au fost determinate (direcţia şi sensul versorului $\vec{n}$).

Introducând $\vec{v}=\lambda\vec{n}$ în (55.2) şi ţinând cont că $\vec{n}\cdot\vec{E}=0$, rezultă $\vec{E}+\lambda\,\vec{n}\times\vec{B}=0$. Înmulţind scalar această relaţie cu vectorul $\vec{n}\times\vec{B}$ se găseşte că

$$\lambda=-\frac{\vec{E}\cdot\left(\vec{n}\times\vec{B}\right)}{\left(\vec{n}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{n}\times\vec{B}\right)}=\frac{\vec{E}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{n}\right)}{\left|\vec{n}\times\vec{B}\right|^2}=\vec{n}\cdot\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\left|\vec{n}\times\vec{B}\right|^2},$$

deci viteza căutată este

$$\vec{v}_B^{(i)}=\lambda\,\vec{n}=-\frac{\vec{E}\cdot\left(\vec{n}\times\vec{B}\right)}{\left|\vec{n}\times\vec{B}\right|^2}\,\vec{n}. \qquad (55.4)$$

În cazul **ii)** viteza $\vec{v}$ trebuie să fie de forma $\vec{v}=\lambda\vec{n}$, cu $\vec{n}\cdot\vec{B}=0$, adică $\vec{n}$ trebuie să fie un vector unitar (versor) situat în planul perpendicular pe direcţia inducţiei câmpului magnetic $\vec{B}$: $\vec{n}\perp\vec{B}$ şi totodată în acelaşi plan şi făcând un unghi diferit de $\pi/2$ cu vectorul intensităţii câmpului electric $\vec{E}$. Introducând $\vec{v}=\lambda\vec{n}$ în (55.2) rezultă

$$(1-\beta)\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right)\vec{n}+\beta\vec{E}+\lambda\beta\,\vec{n}\times\vec{B}=0,$$

relaţie care, înmulţită scalar cu versorul $\vec{n}$ conduce la

$$(1-\beta)\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right)+\beta\left(\vec{E}\cdot\vec{n}\right)=0\;\Leftrightarrow\;\vec{E}\cdot\vec{n}=0,$$

ceea ce contrazice ipoteza conform căreia $\vec{v}\cdot\vec{E}=\lambda\,\vec{n}\cdot\vec{E}\neq 0$. Rezultă deci că acest caz nu este realizabil fizic.

În fine, în cazul **iii)** vectorul $\vec{v}$ trebuie să fie perpendicular atât pe $\vec{E}$, cât şi pe $\vec{B}$, cu alte cuvinte, vectorii $\vec{E}$, $\vec{B}$ şi $\vec{v}$ trebuie să formeze un

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

triedru ortogonal, ceea ce implică faptul că viteza $\vec{v}$ trebuie să fie de forma $\vec{v}=\lambda\,\vec{E}\times\vec{B}$, unde λ este, deocamdată, un scalar nedeterminat. Înlocuind pe $\vec{v}=\lambda\,\vec{E}\times\vec{B}$ în relația (55.2). Rezultă

$$(1-\beta)\underbrace{\left[\vec{E}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\right]}_{=0}\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2}+\beta\left[\vec{E}+\lambda\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\times\vec{B}\right]=0\ \Leftrightarrow$$

$$\vec{E}-\lambda\vec{B}\times\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)=0\ \Leftrightarrow\ \vec{E}-\lambda B^2\vec{E}+\lambda\vec{B}\underbrace{\left(\vec{B}\cdot\vec{E}\right)}_{=0}=0\ \Leftrightarrow\ \lambda=\frac{1}{B^2}.$$

Deci, în acest caz particular, viteza căutată este

$$\vec{v}_B^{(iii)}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}. \tag{55.5}$$

b) Pentru ca în S' să nu existe decât câmp electric, trebuie, evident, ca $\vec{B}'=0$. Utilizând (55.1, 2), acest lucru înseamnă că trebuie să fie îndeplinită condiția

$$(1-\beta)\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)\frac{\vec{v}}{v^2}+\beta\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)=0. \tag{55.6}$$

Presupunând din nou referențialul S fix, cerința punctului **b)** al problemei revine la a determina viteza relativă $\vec{v}$ (care acum va fi viteza referențialului S') care satisface condiția (55.6). Înmulțind scalar această relație cu $\vec{E}$ și având în vedere din nou faptul că produsul mixt a trei vectori, dintre care cel puțin doi sunt coliniari, se anulează, și că, prin ipotezele problemei $\vec{E}\cdot\vec{B}=0$, rezultă aceeași condiție ca în cazul **a)**, anume

$$\frac{(1-\beta)}{v^2}\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)\left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right)=0,$$

cu aceleași cazuri de realizare din punct de vedere matematic:

i) $\vec{v}\cdot\vec{E}=0$ și $\vec{v}\cdot\vec{B}\neq 0$, sau

ii) $\vec{v}\cdot\vec{B}=0$ și $\vec{v}\cdot\vec{E}\neq 0$, sau

iii) $\vec{v}\cdot\vec{E}=0$ și $\vec{v}\cdot\vec{B}=0$.

Procedând la fel ca în cazul a), $\vec{v}\cdot\vec{E}=0$ și $\vec{v}\cdot\vec{B}\neq 0$ implică $\vec{v}=\lambda\vec{n}$, cu $\vec{n}\cdot\vec{E}=0$, adică $\vec{n}$ trebuie să fie un versor situat în planul perpendicular

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

pe $\vec{E}$ şi totodată în acelaşi plan şi făcând un unghi diferit de $\pi/2$ cu $\vec{B}$. Cu $\vec{v}=\lambda\vec{n}$ în (55.6) rezultă

$$(1-\beta)(\vec{B}\cdot\vec{n})\vec{n}+\beta\left(\vec{B}-\frac{\lambda\vec{n}}{c^2}\times\vec{E}\right)=0,$$

relaţie care, înmulţită scalar cu versorul $\vec{n}$ conduce la

$$(1-\beta)(\vec{B}\cdot\vec{n})+\beta(\vec{B}\cdot\vec{n})=0 \Leftrightarrow \vec{B}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \vec{B}\cdot\vec{v}=0,$$

ceea ce contrazice ipoteza de plecare, conform căreia $\vec{v}\cdot\vec{B}\neq 0$. Aşadar, acest prim subcaz, **i)**, este irealizabil fizic.

Dacă $\vec{v}\cdot\vec{B}=0$ şi $\vec{v}\cdot\vec{E}\neq 0$, atunci $\vec{v}=\lambda\vec{n}$, cu $\vec{n}\cdot\vec{B}=0$, adică $\vec{n}$ trebuie să fie un versor situat în planul perpendicular pe $\vec{B}$ şi totodată în acelaşi plan şi făcând un unghi diferit de $\pi/2$ cu $\vec{E}$. Introducând $\vec{v}=\lambda\vec{n}$ astfel definit în (55.6) se obţine

$$\vec{B}-\frac{\lambda}{c^2}\vec{n}\times\vec{E}=0.$$

Înmulţind scalar această relaţie cu vectorul $\vec{n}\times\vec{E}$ se găseşte

$$\vec{B}\cdot(\vec{n}\times\vec{E})-\frac{\lambda}{c^2}(\vec{n}\times\vec{E})\cdot(\vec{n}\times\vec{E})=0 \Rightarrow \lambda=c^2\frac{\vec{B}\cdot(\vec{n}\times\vec{E})}{\left|\vec{n}\times\vec{E}\right|^2},$$

adică, în acest subcaz, **ii)**, viteza căutată este

$$\vec{v}\equiv\vec{v}_E^{(ii)}=c^2\frac{\vec{B}\cdot(\vec{n}\times\vec{E})}{\left|\vec{n}\times\vec{E}\right|^2}\vec{n}. \qquad (55.7)$$

În sfârşit, $\vec{v}\cdot\vec{E}=0$ şi $\vec{v}\cdot\vec{B}=0$ implică faptul că viteza formează un triedru ortogonal cu cei doi vectori, $\vec{E}$ şi $\vec{B}$, adică trebuie să fie de forma $\vec{v}=\lambda\,\vec{E}\times\vec{B}$. Cu aceasta în (55.6) rezultă

$$(1-\beta)\underbrace{\left[\vec{B}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})\right]}_{=0}\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2}+\beta\left[\vec{B}-\frac{\lambda}{c^2}(\vec{E}\times\vec{B})\times\vec{E}\right]=0 \Leftrightarrow$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$c^2\vec{B}+\lambda\vec{E}\times\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)=0 \Leftrightarrow c^2\vec{B}+\lambda\vec{E}\underbrace{\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)}_{=0}-\lambda E^2\vec{B}=0 \Rightarrow \lambda=\frac{c^2}{E^2}.$$

Deci, în acest ultim subcaz, **iii)**, viteza căutată este

$$\vec{v}\equiv\vec{v}_E^{(iii)}=c^2\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{E^2}. \tag{55.8}$$

Problema nr. 56

Intensitatea câmpului electric $\vec{E}$ şi inducţia câmpului magnetic $\vec{B}$ ale unui câmp electromagnetic uniform sunt date într-un sistem de referinţă inerţial fix şi, în plus $\vec{E}\cdot\vec{B}>0$. Să se afle viteza $\vec{v}$ a sistemului de referinţă inerţial în care cei doi vectori sunt paraleli.

Rezolvare

Relaţiile de transformare ale câmpurilor electric şi magnetic la trecerea de la un referenţial inerţial S la un altul S' sunt [vezi (54.1)]

$$\begin{aligned}\vec{E}'&=(1-\beta)\left(\vec{E}\cdot\vec{v}\right)\frac{\vec{v}}{v^2}+\beta\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right),\\ \vec{B}'&=(1-\beta)\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)\frac{\vec{v}}{v^2}+\beta\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right),\end{aligned} \tag{56.1}$$

unde $\vec{v}$ este viteza relativă a celor două referenţiale (aici, viteza lui S' faţă de S). Trecerea inversă se poate face utilizând transformările: $\vec{E}\leftrightarrow\vec{E}'$, $\vec{B}\leftrightarrow\vec{B}'$ şi $\vec{v}\to-\vec{v}$ în relaţiile (56.1).

Conform enunţului problemei, în S câmpurile sunt uniforme şi, în plus, satisfac relaţia $\vec{E}\cdot\vec{B}>0$. Pentru ca în S' cele două câmpuri să fie paralele trebuie, evident, să fie satisfăcută condiţia $\vec{E}\times\vec{B}'=0$. Ţinând cont de relaţiile (56.1), această condiţie revine la

$$\left[(1-\beta)\left(\vec{E}\cdot\vec{v}\right)\frac{\vec{v}}{v^2}+\beta\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\right]\times\left[(1-\beta)\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)\frac{\vec{v}}{v^2}+\beta\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)\right]=0,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau (având în vedere că produsul mixt a trei vectori, dintre care cel puțin doi sunt coliniari este nul)

$$\beta(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\times\vec{B}}{v^2}-\beta(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{E})}{v^2c^2}-\beta(1-\beta)(\vec{B}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{v^2}+$$
$$\beta^2(\vec{E}\times\vec{B})-\frac{\beta^2}{c^2}[\vec{E}\times(\vec{v}\times\vec{E})]-\beta(1-\beta)(\vec{B}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{B})}{v^2}-$$
$$\beta^2[\vec{B}\times(\vec{v}\times\vec{B})]-\frac{\beta^2}{c^2}(\vec{v}\times\vec{B})\times(\vec{v}\times\vec{E})=0. \qquad (56.2)$$

Ținând cont de faptul că

$$[(\vec{v}\times\vec{B})\times(\vec{v}\times\vec{E})]_i=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}\varepsilon_{kpq}v_lv_pE_qB_m=(\varepsilon_{jki}\varepsilon_{jlm})\varepsilon_{kpq}v_lv_pE_qB_m=$$
$$(\delta_{kl}\delta_{im}-\delta_{km}\delta_{il})\varepsilon_{kpq}v_lv_pE_qB_m=\underbrace{\varepsilon_{lpq}v_lv_p}_{=0}E_qB_i-\varepsilon_{mpq}v_iv_pE_qB_m=$$
$$-(\varepsilon_{mpq}B_mv_pE_q)v_i=-\vec{B}\cdot(\vec{v}\times\vec{E})v_i\ ,$$

adică, sub formă vectorială,

$$(\vec{v}\times\vec{B})\times(\vec{v}\times\vec{E})=-[\vec{B}\cdot(\vec{v}\times\vec{E})]\vec{v}\ ,$$

și având în vedere dezvoltarea dublului produs vectorial: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, prin efectuarea simplificărilor de rigoare, relația (56.2) se rescrie astfel

$$\beta(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\times\vec{B}}{v^2}-\beta(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})^2\frac{\vec{v}}{v^2c^2}+\beta(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{E}}{c^2}-$$
$$\beta(1-\beta)(\vec{B}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{v^2}+\beta^2(\vec{E}\times\vec{B})-\beta^2E^2\frac{\vec{v}}{c^2}+\beta^2(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{E}}{c^2}-$$
$$\beta(1-\beta)(\vec{B}\cdot\vec{v})^2\frac{\vec{v}}{v^2}+\beta(\vec{B}\cdot\vec{v})\vec{B}-\beta^2B^2\vec{v}+\beta^2[\vec{v}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})]\frac{\vec{v}}{c^2}=0. \qquad (56.3)$$

Înmulțind vectorial la stânga relația (56.3) cu $\vec{v}$ și ținând cont de faptul că produsul vectorial a doi vectori coliniari este nul, se obține

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\beta(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{B})}{v^2}+\beta(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}-\beta(1-\beta)(\vec{B}\cdot\vec{v})\times$$

$$\frac{\vec{v}\times(\vec{v}\times\vec{E})}{v^2}+\beta^2\left[\vec{v}\times(\vec{E}\times\vec{B})\right]+\beta^2(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}+\beta(\vec{B}\cdot\vec{v})(\vec{v}\times\vec{B})=0.$$

Dezvoltând şi aici dublele produse vectoriale, avem

$$\beta(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})(\vec{B}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}}{v^2}-\beta(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})\vec{B}+\beta(1-\beta)(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}-$$

$$\beta(1-\beta)(\vec{B}\cdot\vec{v})(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}}{v^2}+\beta(1-\beta)(\vec{B}\cdot\vec{v})\vec{E}+\beta^2(\vec{B}\cdot\vec{v})\vec{E}-\beta^2(\vec{E}\cdot\vec{v})\vec{B}+$$

$$\beta^2(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}+\beta(\vec{B}\cdot\vec{v})(\vec{v}\times\vec{B})=0,$$

sau

$$-\beta(\vec{E}\cdot\vec{v})\vec{B}+\beta(\vec{E}\cdot\vec{v})\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}+\beta(\vec{B}\cdot\vec{v})\vec{E}+\beta(\vec{B}\cdot\vec{v})(\vec{v}\times\vec{B})=0,$$

iar de aici

$$(\vec{E}\cdot\vec{v})\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\right)=(\vec{B}\cdot\vec{v})(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}),$$

relaţie ce nu poate fi adevărată pentru orice $\vec{v}\neq 0$, cu $\vec{E}\cdot\vec{B}>0$, decât dacă $\vec{E}\cdot\vec{v}=0$ şi $\vec{B}\cdot\vec{v}=0$, adică dacă $\vec{v}\perp\vec{E}$ şi $\vec{v}\perp\vec{B}$, ceea ce nu poate avea loc decât dacă vectorul viteză este în planul determinat de direcţia lui $\vec{E}\times\vec{B}$, căci, aşa cum se ştie, direcţia vectorului produs vectorial este simultan perpendiculară pe direcţiile celor doi vectori care se înmulţesc vectorial (este perpendiculară pe planul determinat de cei doi vectori). În acest fel rezultă cu necesitate că $\vec{v}=\lambda\,\vec{E}\times\vec{B}$, iar problema revine la a determina scalarul nenul λ. Pentru aceasta înmulţim scalar relaţia (56.3) cu $\vec{v}$ şi ţinem cont că $\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{E})=0$ şi $\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{B})=0$. Rezultă

$$-\beta(1-\beta)\frac{(\vec{E}\cdot\vec{v})^2}{c^2}+\beta(1-\beta)\frac{(\vec{E}\cdot\vec{v})^2}{c^2}+\beta^2\,\vec{v}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})-\beta^2E^2\frac{v^2}{c^2}+$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\beta^2\frac{\left(\vec{E}\cdot\vec{v}\right)^2}{c^2}-\beta(1-\beta)\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)^2+\beta\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)^2-\beta^2B^2v^2+\beta^2\left[\vec{v}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\right]\frac{v^2}{c^2}=0,$$

sau, efectuând simplificările,

$$\vec{v}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)-v^2\left(B^2+\frac{E^2}{c^2}\right)+\frac{\left(\vec{E}\cdot\vec{v}\right)^2}{c^2}+\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)^2=0,$$

relație care, dacă se ține cont și de faptul că $\vec{E}\cdot\vec{v}=0$, $\vec{B}\cdot\vec{v}=0$ și $\vec{v}=\lambda\,\vec{E}\times\vec{B}$, devine

$$\lambda\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2\left(1+\frac{\lambda^2\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2}{c^2}\right)-\lambda^2\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2\left(B^2+\frac{E^2}{c^2}\right)=0.$$

Aducând la același numitor și simplificând prin $\lambda\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2\neq0$, se obține următoarea ecuație de gradul doi în λ

$$\lambda^2\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2-\lambda\left(E^2+c^2B^2\right)+c^2=0,$$

care are soluțiile

$$\lambda_{1,2}=\frac{E^2+c^2B^2\pm\sqrt{\left(E^2+c^2B^2\right)^2-4c^2\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2}}{2\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2}=$$

$$\frac{E^2+c^2B^2\pm\sqrt{E^4+c^4B^4+2c^2E^2B^2-4c^2E^2B^2\sin^2\left(\widehat{\vec{E},\vec{B}}\right)}}{2\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2}=$$

$$\frac{E^2+c^2B^2\pm\sqrt{E^4+c^4B^4-2c^2E^2B^2+4c^2E^2B^2\cos^2\left(\widehat{\vec{E},\vec{B}}\right)}}{2\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2}=$$

$$\frac{E^2+c^2B^2\pm\sqrt{\left(E^2-c^2B^2\right)^2+4c^2\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2}}{2\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2}.$$

Așadar, din punct de vedere matematic problema are două soluții, și anume

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{v}_{1,2}=\frac{E^2+c^2B^2\pm\sqrt{\left(E^2-c^2B^2\right)^2+4c^2\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2}}{2\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2}\vec{E}\times\vec{B}. \qquad (56.4)$$

Soluția acceptabilă din punct de vedere fizic poate fi obținută dacă se exprimă rezultatul sub forma

$$\frac{\left|\vec{v}_{1,2}\right|}{c}=\frac{E^2+c^2B^2\pm\sqrt{\left(E^2-c^2B^2\right)^2+4c^2\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2}}{2c\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|},$$

cantitate care, conform principiilor teoriei relativității restrânse, trebuie să fie subunitară. În concluzie, trebuie verificat dacă

$$E^2+c^2B^2+\sqrt{\left(E^2-c^2B^2\right)^2+4c^2\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2}\le 2c\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|, \qquad (56.5)$$

sau/și

$$E^2+c^2B^2-\sqrt{\left(E^2-c^2B^2\right)^2+4c^2\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2}\le 2c\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|. \qquad (56.6)$$

De exemplu, în cazul unei unde electromagnetice plane, pentru care $\left|\vec{E}\right|=E=c\left|\vec{B}\right|=cB$, relațiile (56.5) și (56.6) devin

$$\sin\left(\widehat{\vec{E},\vec{B}}\right)-\cos\left(\widehat{\vec{E},\vec{B}}\right)\ge 1, \qquad (56.7)$$

respectiv

$$\sin\left(\widehat{\vec{E},\vec{B}}\right)+\cos\left(\widehat{\vec{E},\vec{B}}\right)\ge 1. \qquad (56.8)$$

Din întreg intervalul de variație a unghiului $\left(\widehat{\vec{E},\vec{B}}\right)$ dintre cei doi vectori, adică $\left(\widehat{\vec{E},\vec{B}}\right)\in[0,\,2\pi]$, inegalitatea (56.7) este satisfăcută doar în subintervalul $\left(\widehat{\vec{E},\vec{B}}\right)\in\left[\frac{\pi}{2},\,\pi\right]$, iar inegalitatea (56.8) doar în subintervalul $\left(\widehat{\vec{E},\vec{B}}\right)\in\left[0,\,\frac{\pi}{2}\right]$. Deoarece problema cere ca $\vec{E}\cdot\vec{B}>0$, din punct de vedere fizic trebuie ales doar acel subinterval în care cosinusul unghiului dintre cei doi vectori este pozitiv, care este cel corespunzător inegalității

BCU "ALEXANDRU IOAN CUZA" UNIVERSITY LIBRARY

(56.8), $\left(\widehat{\vec{E},\vec{B}}\right)\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$. În concluzie, din punct de vedere fizic doar soluția cu semnul minus în fața radicalului este acceptabilă

$$\vec{v}=\frac{E^2+c^2B^2-\sqrt{\left(E^2-c^2B^2\right)^2+4c^2\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2}}{2\left|\vec{E}\times\vec{B}\right|^2}\vec{E}\times\vec{B}.$$

Problema nr. 57

În referențialul inerțial S un câmp electromagnetic este descris de vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$, care fac unghiul θ între ei, cu $\left|\vec{B}\right|=k\left|\vec{E}\right|/c$, unde c este viteza luminii în vid. Fie S' referențialul inerțial în care $\vec{E}'$ şi $\vec{B}'$ sunt paraleli şi care se deplasează cu viteza $\vec{v}$ față de S, astfel încât $\vec{v}\perp\vec{E}$ şi $\vec{v}\perp\vec{B}$.

a) Să se stabilească ecuația $\gamma=\gamma(k,\ \theta)$, unde $\gamma=\frac{v}{c}$;

b) Să se arate că problema admite întotdeauna o soluție şi să se calculeze γ în funcție de θ, dacă $k=1$. Ce se petrece când $\theta=\pi/2$?

Rezolvare

a) Viteza $\vec{v}$ fiind perpendiculară atât pe $\vec{E}$ cât şi pe $\vec{B}$, rezultă că vectorii $\vec{E}'$ şi $\vec{B}'$ rămân în planul determinat de $\vec{E}$ şi $\vec{B}$. Să alegem în acest plan axa Ox paralelă cu $\vec{E}_\perp=\vec{E}$.

Atunci, vectorii care intervin au componentele $\vec{E}=(E,\ 0)$; $\vec{B}=(B\cos\theta,\ B\sin\theta)$; $\vec{E}_\perp'=\beta(E-vB\sin\theta,\ vB\cos\theta)$ şi $\vec{B}_\perp'=\beta\left(B\cos\theta,\ B\sin\theta-\frac{v}{c^2}E\right)$, unde

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}. \tag{57.1}$$

Exprimând paralelismul dintre vectorii $\vec{E}'$ şi $\vec{B}'$ prin relaţia evidentă $\vec{u}_z\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}'\right)=0$, unde $\vec{u}_z$ este versorul axei Oz, adică prin

$$E_x'B_y'-E_y'B_x'=0 \tag{57.2}$$

şi ţinând seama că $\left|\vec{B}\right|=k\frac{\left|\vec{E}\right|}{c}$, rezultă ecuaţia căutată

$$\gamma^2-\gamma\frac{1+k^2}{k\sin\theta}+1=0. \tag{57.3}$$

Această ecuaţie poate fi determinată şi din considerente mai generale, apelând la relaţiile de transformare ale câmpului electromagnetic, scrise în cazul general [vezi (54.1)]

$$\begin{aligned}\vec{E}'&=(1-\beta)\left(\vec{E}\cdot\vec{v}\right)\frac{\vec{v}}{v^2}+\beta\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right),\\ \vec{B}'&=(1-\beta)\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)\frac{\vec{v}}{v^2}+\beta\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right).\end{aligned} \tag{57.4}$$

Sub formă vectorială, paralelismul dintre $\vec{E}'$ şi $\vec{B}'$ se exprimă, aşa cum se ştie, prin relaţia

$$\vec{E}\times\vec{B}'=0. \tag{57.5}$$

Având în vedere faptul că $\vec{v}$ este perpendiculară atât pe $\vec{E}$ cât şi pe $\vec{B}$, adică $\left(\vec{v}\cdot\vec{E}\right)=0$ şi $\left(\vec{v}\cdot\vec{B}\right)=0$, relaţiile (57.4) devin

$$\begin{aligned}\vec{E}'&=\beta\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right),\\ \vec{B}'&=\beta\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right),\end{aligned}$$

care, introduse în condiţia de paralelism (57.5), conduc la

$$\vec{E}\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\vec{E}\times\left(\vec{v}\times\vec{E}\right)-\vec{B}\times\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)-\frac{1}{c^2}\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\times\left(\vec{v}\times\vec{E}\right)=0,$$

sau

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{E}\times\vec{B}-\frac{1}{c^2}\vec{E}\times\left(\vec{v}\times\vec{E}\right)-\vec{B}\times\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)+\frac{\vec{v}}{c^2}\left[\vec{v}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\right]=0, \qquad (57.6)$$

unde am avut în vedere faptul că $\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\times\left(\vec{v}\times\vec{E}\right)=-\vec{v}\left[\vec{B}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{E}\right)\right]$ şi, de asemenea, am folosit invarianţa produsului mixt a trei vectori la permutările lor circulare.

Înmulţind scalar relaţia vectorială (57.6) cu viteza $\vec{v}$, se obţine

$$\vec{v}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)-\frac{\vec{v}}{c^2}\cdot\left[\vec{E}\times\left(\vec{v}\times\vec{E}\right)\right]-\vec{v}\cdot\left[\vec{B}\times\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\right]+\frac{v^2}{c^2}\left[\vec{v}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\right]=0,$$

care, dacă se utilizează relaţia $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$, devine:

$$\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\left[\vec{v}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\right]-\frac{v^2}{c^2}E^2+\frac{\vec{v}\cdot\vec{E}}{c^2}\underbrace{\left(\vec{E}\cdot\vec{v}\right)}_{=\vec{v}\cdot\vec{E}=0}-v^2B^2+\underbrace{\left(\vec{v}\cdot\vec{B}\right)}_{=0}\left(\vec{B}\cdot\vec{v}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\left[\vec{v}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\right]-\frac{v^2}{c^2}E^2-v^2B^2=0.$$

deoarece, aşa cum se precizează în enunţul problemei, $\vec{v}\perp\vec{E}$ şi $\vec{v}\perp\vec{B}$.

Întrucât vectorii $\vec{E}$ şi $\vec{B}$ fac unghiul θ între ei şi $\left|\vec{B}\right|=k\frac{\left|\vec{E}\right|}{c}$, rezultă că $\vec{E}\times\vec{B}=\vec{\nu}EB\sin\theta=\vec{\nu}\frac{k}{c}E^2\sin\theta$, unde $\vec{\nu}$ este versorul vectorului $\vec{E}\times\vec{B}$, adică un vector unitate perpendicular atât pe $\vec{E}$, cât şi pe $\vec{B}$, adică paralel cu vectorul viteză $\vec{v}$, $(\vec{v}\parallel\vec{\nu}\Rightarrow\vec{v}\cdot\vec{\nu}=v)$, deoarece aşa se precizează în enunţul problemei.

În aceste condiţii, relaţia găsită anterior: $\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\left[\vec{v}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\right]-\frac{v^2}{c^2}E^2-v^2B^2=0$ devine

$$\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{vk}{c}E^2\sin\theta-\frac{v^2}{c^2}E^2-v^2\frac{k^2}{c^2}E^2=0,$$

adică (deoarece $E\neq0$)

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{vk}{c}\sin\theta-\left(1+k^2\right)\frac{v^2}{c^2}=0,$$

care, având în vedere că $\gamma=\frac{v}{c}$, se scrie

$$\left(1+\gamma^2\right)k\sin\theta-\left(1+k^2\right)\gamma=0,$$

sau

$$\gamma^2-\gamma\frac{1+k^2}{k\sin\theta}+1=0,$$

adică relația (57.3).

b) După cum se observă, relația dintre γ, k și θ este o ecuație de gradul doi în $\gamma=\frac{v}{c}$. Discriminantul acestei ecuații este

$$\Delta=\left(\frac{1+k^2}{k\sin\theta}\right)^2-4=\frac{1+2k^2+k^4-4k^2\sin^2\theta}{k^2\sin^2\theta},$$

și, deoarece

$$1+2k^2+k^4-4k^2\sin^2\theta\geq 1+2k^2+k^4-4k^2=1-2k^2+k^4=\left(1-k^2\right)^2\geq 0,$$

rezultă că ecuația are întotdeauna soluții reale. Acestea sunt date de

$$\gamma_{1,2}=\frac{\frac{1+k^2}{k\sin\theta}\pm\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{\frac{1+k^2}{k\sin\theta}\pm\sqrt{\left(\frac{1+k^2}{k\sin\theta}\right)^2-4}}{2}=\frac{1+k^2}{2k\sin\theta}\pm\sqrt{\left(\frac{1+k^2}{2k\sin\theta}\right)^2-1}. \tag{57.7}$$

Dar, deoarece $\gamma=\frac{v}{c}$ trebuie să satisfacă relațiile evidente (cerute de teoria relativității restrânse), $0\leq\gamma\leq 1$, rezultă că nu pentru orice valori ale lui k și θ cele două soluții sunt acceptabile din punct de vedere fizic.

Pentru $k\in[0,\ 1{,}5]$ și $\theta\in[0,\ 2\pi]$ reprezentarea grafică 3D a soluției: $\gamma_1=\frac{1+k^2}{2k\sin\theta}+\sqrt{\left(\frac{1+k^2}{2k\sin\theta}\right)^2-1}$ arată ca în figurile 57.1 (o anumită

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

perspectivă) şi 57.2 şi 57.3 (alte două perspective; pentru comparaţie vezi liniile de comandă din Mathematica 5.0, corespunzătoare celor trei cazuri).

$$Plot3D[\frac{1+k\,\hat{}\,2}{2*k*\mathrm{Sin}[\theta]}+\sqrt{\left(\frac{1+k\,\hat{}\,2}{2*k*\mathrm{Sin}[\theta]}\right)\hat{}\,2-1},\{k,0.,1.5\},\ \{\theta,0.,2\pi\},$$
$$\mathrm{ViewPoint}\rightarrow\{1.5,0.,0.\}]$$

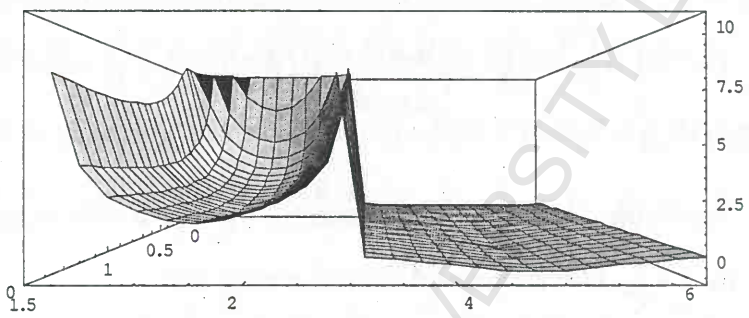


Fig. 57.1

$$Plot3D[\frac{1+k\,\hat{}\,2}{2*k*\mathrm{Sin}[\theta]}+\sqrt{\left(\frac{1+k\,\hat{}\,2}{2*k*\mathrm{Sin}[\theta]}\right)\hat{}\,2-1},\{k,0.,1.5\},\ \{\theta,0.,2\pi\},$$
$$\mathrm{ViewPoint}\rightarrow\{1.5,-1.,1.5\}]$$

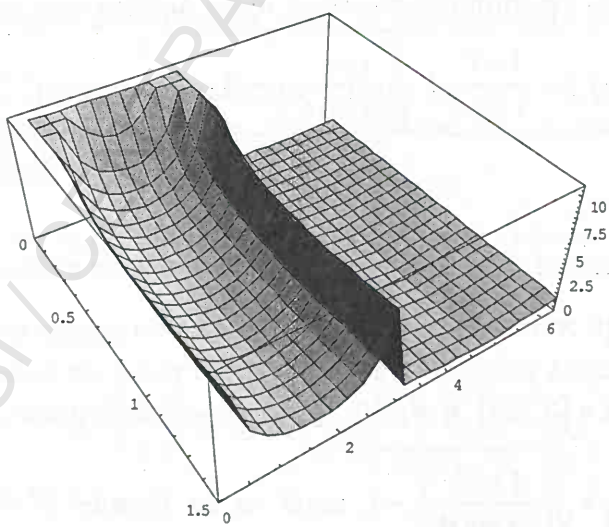


Fig. 57.2

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

```
Plot3D[(1+k^2)/(2*k*Sin[θ]) + Sqrt[((1+k^2)/(2*k*Sin[θ]))^2 - 1], {k,0.,1.5}, {θ,0.,2π},
  ViewPoint → {1.,1.,1.}]
```

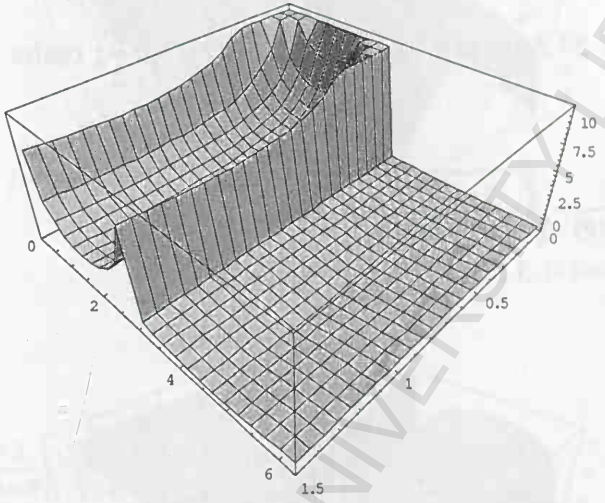


Fig. 57.3

Pentru aceleași valori ale variabilelor, $k \in [0,\ 1,5]$ și $\theta \in [0,\ 2\pi]$ reprezentarea grafică 3D a soluției $\gamma_2 = \dfrac{1+k^2}{2k\sin\theta} - \sqrt{\left(\dfrac{1+k^2}{2k\sin\theta}\right)^2 - 1}$ arată ca în figurile 57.4 (o anumnită perspectivă) și 57.5 și 57.6 (alte două perspective; pentru comparație vezi liniile de comandă din Mathematica 5.0, corespunzătoare celor trei cazuri).

Dacă $k = 1$ ecuația (57.3) devine

$$\gamma^2 - \frac{2\gamma}{\sin\theta} + 1 = 0 \qquad (57.8)$$

și are soluțiile

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{\sin\theta} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 - 1} = \frac{1}{\sin\theta} \pm \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică $\gamma_1 = \cot\frac{\theta}{2}$ şi $\gamma_2 = \tan\frac{\theta}{2}$, a căror reprezentare grafică arată ca în figurile 57.7 (pentru $\gamma_1 = \frac{1}{\sin\theta} + \cot\theta = \cot\frac{\theta}{2}$; curba cu asimptote verticale) şi respectiv 57.8 (pentru $\gamma_2 = \frac{1}{\sin\theta} - \cot\theta = \tan\frac{\theta}{2}$; curba cu asimptote verticale).

```
Plot3D[(1+k^2)/(2*k*Sin[θ]) - Sqrt[((1+k^2)/(2*k*Sin[θ]))^2 - 1], {k, 0., 1.5}, {θ, 0., 2π},
  ViewPoint → {-1., 1., 1.}]
```

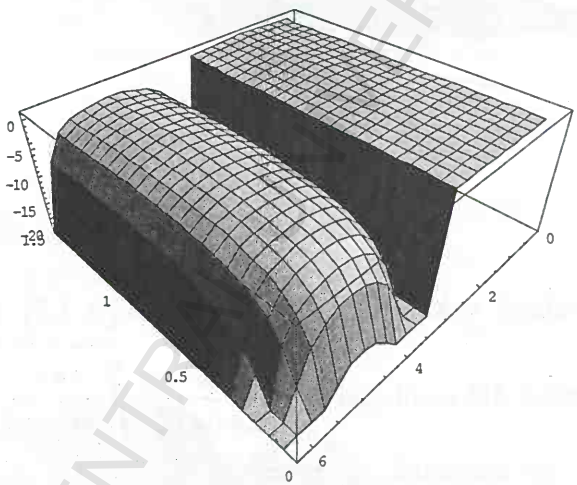


Fig. 57.4

```
Plot3D[(1+k^2)/(2*k*Sin[θ]) - Sqrt[((1+k^2)/(2*k*Sin[θ]))^2 - 1], {k, 0., 1.5}, {θ, 0., 2π},
  ViewPoint → {1.5, -1., 1.5}]
```


BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

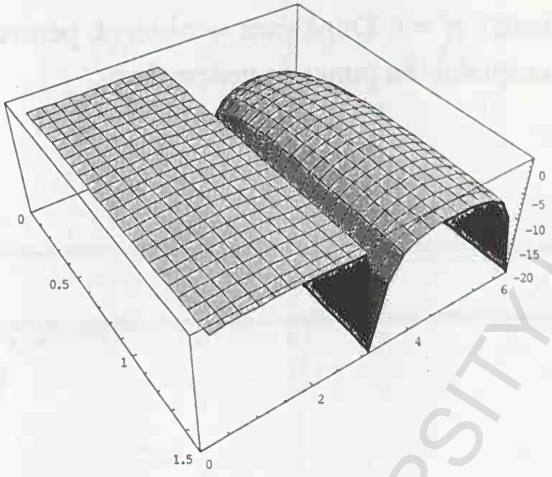


Fig. 57.5

$$Plot3D[\frac{1+k\,\hat{}\,2}{2*k*\mathrm{Sin}[\theta]}-\sqrt{\left(\frac{1+k\,\hat{}\,2}{2*k*\mathrm{Sin}[\theta]}\right)\,\hat{}\,2-1},\{k,0.,1.5\},\ \{\theta,0.,2\pi\},$$
$$\mathrm{ViewPoint}\rightarrow\{1.5,0.,0.\}]$$

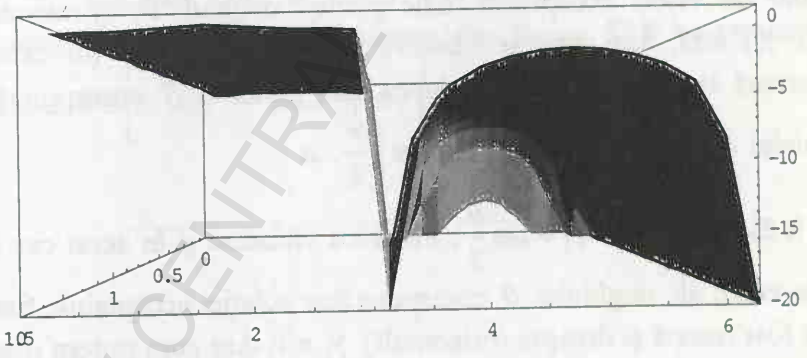


Fig. 57.6

b.1) Soluția $\gamma=\gamma_1=\cot\frac{\theta}{2}$. Pentru a vizualiza intervalul de valori ale unghiului θ corespunzător soluției acceptabile fizic, pe grafic a fost trasată

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi dreapta (orizontală) $\gamma_1^* = 1$. După cum se observă, pentru $\theta > \pi$, $\gamma_1 < 0$, ceea ce nu este acceptabil din punct de vedere fizic.

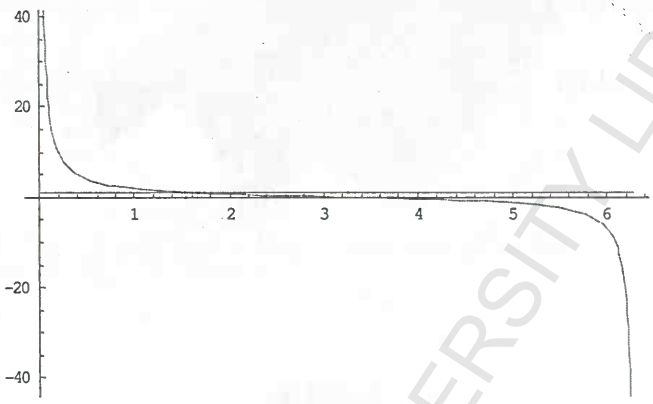


Fig. 57.7

În intervalul $\theta \in [0,\ 2\pi]$, ecuaţia $\gamma_1 = 1$ are soluţia $\theta = \frac{\pi}{2}$, deci intervalul de valori acceptabile fizic pentru unghiul θ, corespunzător soluţiei γ_1, este, aşa cum se observă şi din figura 57.9 (în care este reprezentată la scară mărită porţiunea din figura 57.7 corespunzătoare intervalului $\theta \in \left[\frac{\pi}{2} - 0{,}1,\ \pi + 0{,}1\right]$), $\theta \in \left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

b.2) Soluţia $\gamma = \gamma_2 = \tan\frac{\theta}{2}$. Pentru a vizualiza şi în acest caz intervalul de valori ale unghiului θ corespunzător soluţiei acceptabile fizic, pe grafic a fost trasată şi dreapta (orizontală) $\gamma_2^* = 1$. Aşa cum putem observa, şi în acest caz, pentru $\theta > \pi$, $\gamma_2 < 0$, ceea ce nu este acceptabil din punct de vedere fizic.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

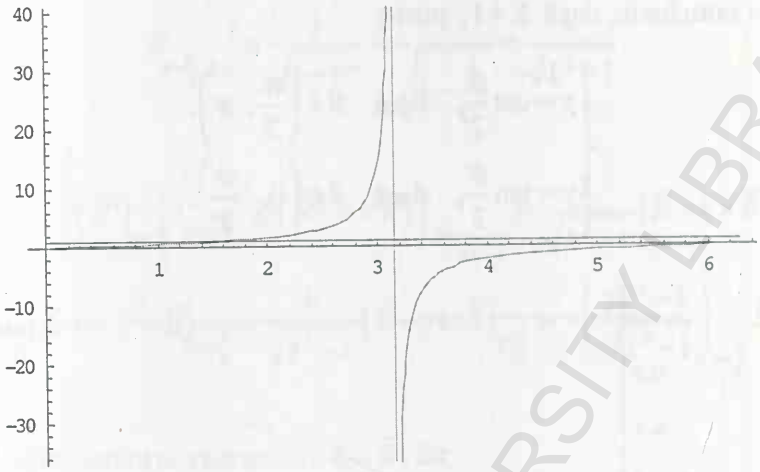


Fig. 57.8

În intervalul $\theta \in [0,\ 2\pi]$, ecuația $\gamma_2 = 1$ are soluția $\theta = \frac{\pi}{2}$, deci intervalul de valori acceptabile fizic pentru unghiul θ, corespunzător soluției γ_2, este, așa cum se observă și din figura 57.10 (în care este reprezentată la scară mărită porțiunea din figura 57.8 corespunzătoare intervalului $\theta \in \left[-0{,}1,\ \frac{\pi}{2}+0{,}1\right]$), $\theta \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

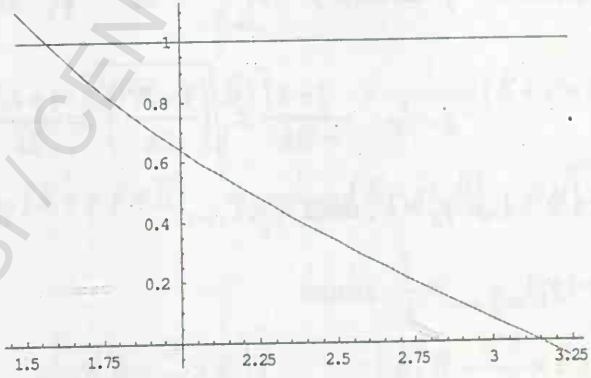


Fig. 57.9

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În concluzie, dacă $k=1$, atunci

$$\begin{cases} \gamma = \cot\dfrac{\theta}{2}, & \text{dacă} \quad \theta \in \left(\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right), \\ \gamma = \tan\dfrac{\theta}{2}, & \text{dacă} \quad \theta \in \left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases} \tag{57.9}$$

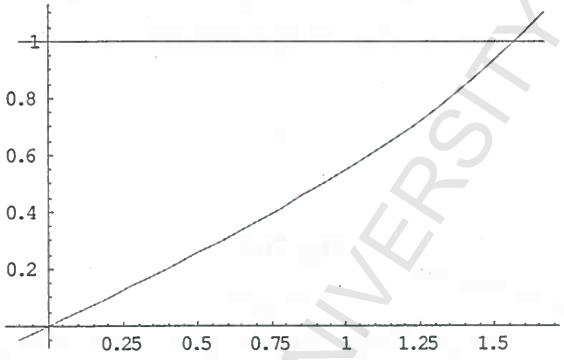


Fig. 57.10

Dacă $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ atunci

$$\left(\gamma_{1,2}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{1+k^2}{2k\sin\theta} \pm \sqrt{\left(\frac{1+k^2}{2k\sin\theta}\right)^2 - 1}\right]_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1+k^2}{2k} \pm \sqrt{\left(\frac{1+k^2}{2k}\right)^2 - 1} =$$

$$\frac{1+k^2}{2k} \pm \sqrt{\left(\frac{1-k^2}{2k}\right)^2} = \frac{1+k^2}{2k} \pm \frac{1-k^2}{2k},$$

deci $\gamma_1 = \dfrac{1}{k}$, dacă $k>1$ şi $\gamma_2 = k$, dacă $k<1$.

Dacă $\gamma = (\gamma_1)_{\theta=\frac{\pi}{2},\, k>1} = \dfrac{1}{k}$, atunci

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\beta_{\theta=\frac{\pi}{2},\,k>1}=\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}=\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}$$

şi

$$\left(\vec{E}'\right)_{\theta=\frac{\pi}{2},\,k>1}=\left[\beta\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\right]_{\beta=\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}}=\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)_{\gamma=\frac{1}{k}}=$$

$$\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\left(\vec{E}+v\ \vec{v}\times\vec{B}\right)_{\gamma=\frac{1}{k}}=\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\left(\vec{E}-\gamma k\ \vec{E}\right)_{\gamma=\frac{1}{k}}=-\left(\frac{\gamma k^2-k}{\sqrt{k^2-1}}\right)_{\gamma=\frac{1}{k}}\vec{E}=0\,,$$

(57.10)

unde $\vec{v}$ este versorul vectorului $\vec{E}\times\vec{B}$, iar

$$\left(\vec{B}'\right)_{\theta=\frac{\pi}{2},\,k>1}=\left[\beta\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)\right]_{\beta=\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}}=\left[\beta\left(\vec{B}-\frac{v\ \vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)\right]_{\beta=\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}}=$$

$$\left[\beta\left(\vec{B}-\frac{\gamma}{k}\vec{B}\right)\right]_{\beta=\frac{k}{\sqrt{k^2-1}},\ \gamma=\frac{1}{k}}=\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\vec{B}=\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}\vec{B}.$$

(57.11)

Dacă $\gamma=(\gamma_2)_{\theta=\frac{\pi}{2},\,k<1}=k$, atunci

$$\beta_{\theta=\frac{\pi}{2},\,k<1}=\frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$$

şi

$$\left(\vec{E}'\right)_{\theta=\frac{\pi}{2},\,k<1}=\left[\beta\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\right]_{\beta=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)_{\gamma=k}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left(\vec{E}+v\ \vec{v}\times\vec{B}\right)_{\gamma=k}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\left(\vec{E}-\gamma k\ \vec{E}\right)_{\gamma=k}=\sqrt{1-k^2}\ \vec{E},$$

(57.12)

iar

$$\left(\vec{B}'\right)_{\theta=\frac{\pi}{2},\,k<1}=\left[\beta\left(\vec{B}-\frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)\right]_{\beta=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}}=\left[\beta\left(\vec{B}-\frac{v\ \vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)\right]_{\beta=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}}=$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\left[\beta\left(\vec{B}-\frac{\gamma}{k}\vec{B}\right)\right]_{\beta=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}},\ \gamma=k}=\left(\frac{1-\frac{\gamma}{k}}{\sqrt{1-k^2}}\right)_{\gamma=k}\vec{B}=0\,. \tag{57.13}$$

În fine, dacă $k=1$ şi $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ rezultă că $\gamma=\gamma_1=\gamma_2=1$, iar din (57.11) şi (57.12) urmează că $\vec{B}'=0$ şi $\vec{E}'=0$. Rămâne de arătat că relaţiile (57.10) şi (57.13) conduc la acelaşi rezultat, adică

$$\lim_{k\to 1}\left(\frac{\gamma k^2-k}{\sqrt{k^2-1}}\right)_{\gamma=\frac{1}{k}}=0$$

şi

$$\lim_{k\to 1}\left(\frac{1-\frac{\gamma}{k}}{\sqrt{1-k^2}}\right)_{\gamma=k}=0\,.$$

Într-adevăr, utilizând regula lui l'Hòspital, avem

$$\lim_{k\to 1}\left(\frac{\gamma k^2-k}{\sqrt{k^2-1}}\right)_{\gamma=\frac{1}{k}}=\lim_{k\to 1}\left(\frac{k-k}{\sqrt{k^2-1}}\right)=\lim_{k\to 1}\left(\frac{1-1}{\frac{k}{\sqrt{k^2-1}}}\right)=\lim_{k\to 1}\frac{(1-1)\sqrt{k^2-1}}{k}=0$$

şi

$$\lim_{k\to 1}\left(\frac{1-\frac{\gamma}{k}}{\sqrt{1-k^2}}\right)_{\gamma=k}=\lim_{k\to 1}\left(\frac{k-\gamma}{k\sqrt{1-k^2}}\right)_{\gamma=k}=\lim_{k\to 1}\frac{k-k}{k\sqrt{1-k^2}}=$$

$$\lim_{k\to 1}\frac{1-1}{\sqrt{1-k^2}-\frac{k^2}{\sqrt{1-k^2}}}=\lim_{k\to 1}\frac{(1-1)\sqrt{1-k^2}}{1-2k^2}=0.$$

BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 58

Să se determine componentele electrică și magnetică ale câmpului electromagnetic creat de o sarcină electrică punctiformă, q, aflată în mișcare rectilinie și uniformă cu viteza $\vec{v}$.

Rezolvare

Presupunem că sarcina electrică q se află în originea O' a referențialului inerțial S' (referențialul propriu), aflat în mișcare rectilinie și uniformă în direcția și sensul axei comune xx'. În S' avem

$$\vec{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{r}'}{r'^3}\ ;\ \vec{B}' = 0\,. \tag{58.1}$$

Întrucât componentele după xx' ale lui $\vec{E}$ și $\vec{B}$ nu sunt afectate de deplasarea referențialelor, având în vedere relațiile generale de transformare (54.1), precum și relațiile (58.1), în referențialul S avem

$$\begin{cases} E_x = E_x' = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q}{r'^3}x' = \beta\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q}{s^3}(x - vt); \\ E_y = \beta(E_y' + vB_z') = \beta\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q}{s^3}y; \\ E_z = \beta(E_z' - vB_y') = \beta\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q}{s^3}z, \end{cases} \tag{58.2}$$

unde $s^2 = [\beta(x - vt)]^2 + y^2 + z^2$. De asemenea,

$$\begin{cases} B_x = B_x' = 0; \\ B_y = \beta\left(B_y' - \dfrac{v}{c^2}E_z'\right) = -\dfrac{v}{c^2}E_z = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\beta\dfrac{v}{c^2}\dfrac{q}{s^3}z = -\dfrac{\mu_o}{4\pi}\beta\dfrac{qzv}{s^3}; \\ B_z = \beta\left(B_z' + \dfrac{v}{c^2}E_y'\right) = \dfrac{v}{c^2}E_y = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\beta\dfrac{qyv}{s^3}. \end{cases} \tag{58.3}$$

În consecință,

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{E} = \beta \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\vec{r} - \vec{v}t}{s^3};$$
$$\vec{B} = \frac{\mu_o q}{4\pi} \beta \frac{\vec{r}}{s^3} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}. \tag{58.4}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

X. DINAMICĂ RELATIVIST-COVARIANTĂ

Problema nr. 59

Să se studieze mişcarea relativistă a unui electron într-un câmp electric uniform, $\vec{E}$, utilizând formalismul cuadridimensional.

Rezolvare

Presupunem că la momentul iniţial particula are impulsul $\vec{p}_0$ şi se găseşte în originea sistemului de coordonate propriu, a cărui axă Ox este îndreptată în direcţia şi sensul câmpului electric uniform $\vec{E}$.

Vom considera ecuaţiile de mişcare covariante sub forma

$$\frac{dp^i}{ds}=\frac{d}{ds}(m_0cu^i)=\frac{d}{d\tau}(m_0u^i)=eF^{ik}u_k \quad \left(i,k=\overline{1,4}\right), \tag{59.1}$$

cu timpul propriu τ ca parametru. În cazul particular din enunţul problemei, tensorul câmpului electromagnetic, F_{ik}, se scrie astfel

$$\left(F_{ik}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{E}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{E}{c} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{59.2}$$

iar F^{ik} este

$$\left(F^{ik}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E}{c} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{59.3}$$

Ţinând cont că sarcina electronului este negativă şi luând $e>0$, ecuaţiile de mişcare devin

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$
\begin{aligned}
m_0 \frac{du_1}{d\tau} &= e\frac{E}{c}u_4 \,, \\
m_0 \frac{du_2}{d\tau} &= 0 \,, \\
m_0 \frac{du_3}{d\tau} &= 0 \,, \\
m_0 \frac{du_4}{d\tau} &= e\frac{E}{c}u_1 \,.
\end{aligned}
\tag{59.4}
$$

Aceste patru ecuații formează un sistem pentru cele patru componente ale cuadrivitezei u_i $\left(i=\overline{1,4}\right)$, exprimate ca funcții de timpul propriu τ: $u_i = u_i(\tau)$. Din prima ecuație a sistemului rezultă succesiv

$$
m_0 \frac{du_1}{d\tau} = e\frac{E}{c}u_4 \Rightarrow u_4 = \frac{c}{eE}m_0\frac{du_1}{d\tau} \Rightarrow \frac{du_4}{d\tau} = \frac{c}{eE}m_0\frac{d^2u_1}{d\tau^2}\,, \tag{59.5}
$$

care, introdusă în ecuația a patra a sistemului, dă

$$
\frac{cm_0^2}{eE}\frac{d^2u_1}{d\tau^2} = \frac{eE}{c}u_1 \Rightarrow \frac{d^2u_1}{d\tau^2} = \left(\frac{eE}{m_0c}\right)^2 u_1 = \omega_0^2 u_1\,, \tag{59.6}
$$

unde

$$
\omega_0 = \frac{eE}{m_0c}\,. \tag{59.7}
$$

De aici rezultă

$$
u_1 = a_1 ch\ \omega_0\tau + a_4 sh\ \omega_0\tau\,, \tag{59.8}
$$

unde a_1 şi a_4 sunt două constante arbitrare de integrare. Introducând această soluție în ultima ecuație a sistemului, rezultă

$$
m_0\frac{du_4}{d\tau} = e\frac{E}{c}u_1 = e\frac{E}{c}\left(a_1 ch\ \omega_0\tau + a_4 sh\ \omega_0\tau\right) \Leftrightarrow \frac{du_4}{d\tau} = \omega_0\left(a_1 ch\ \omega_0\tau + a_4 sh\ \omega_0\tau\right) \tag{59.9}
$$

de unde

$$
u_4 = a_1 sh\ \omega_0\tau + a_4 ch\ \omega_0\tau\,. \tag{59.10}
$$

Din ecuațiile doi şi trei ale sistemului rezultă simplu

$$
\begin{aligned}
u_2 &= a_2 \,, \\
u_3 &= a_3 \,,
\end{aligned}
\tag{59.11}
$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde a_2 şi a_3 sunt, de asemenea, constante arbitrare de integrare.

Presupunând că originea timpului propriu τ coincide cu momentul iniţial, condiţiile iniţiale sunt

$$u_{10} = \frac{p_{0x}}{m_0 c}; \quad x_0 = 0, \tag{59.12 a}$$

$$u_{20} = \frac{p_{0y}}{m_0 c}; \quad y_0 = 0, \tag{59.12 b}$$

$$u_{30} = \frac{p_{0z}}{m_0 c}; \quad z_0 = 0, \tag{59.12 c}$$

$$u_{40} = -\frac{W_0}{m_0 c^2}; \quad \tau_0 = t_0 = 0, \tag{59.12 d}$$

deoarece în cadrul formalismului cuadridimensional, 4-vectorul impuls este

$$p_i = \left(\vec{p}, -\frac{W}{c} \right), \tag{59.13}$$

şi cum $p_i = m_0 c u_i$, rezultă că

$$u_1 = \frac{p_1}{m_0 c}, \; u_2 = \frac{p_2}{m_0 c}, \; u_3 = \frac{p_3}{m_0 c} \text{ şi } u_4 = \frac{p_4}{m_0 c} = -\frac{W}{m_0 c^2}. \tag{59.14}$$

Mai sus, W_0 este energia totală a particulei la momentul iniţial, p_{0x}, p_{0y} şi p_{0z} sunt valorile iniţiale ale proiecţiei impulsului pe cele trei axe de coordonate, iar $u_{i0} = u_i(\tau_0) = u_i(\tau = 0)$. Condiţiile iniţiale considerate determină în mod univoc constantele de integrare a_i, $\left(i = \overline{1,4}\right)$.

Astfel, rezultă simplu că $a_1 = \frac{p_{0x}}{m_0 c}$, $a_2 = \frac{p_{0y}}{m_0 c}$, $a_3 = \frac{p_{0z}}{m_0 c}$ şi $a_4 = -\frac{W_0}{m_0 c^2}$ şi atunci

$$u_1 = \frac{p_{0x}}{m_0 c} ch\, \omega_0 \tau - \frac{W_0}{m_0 c^2} sh\, \omega_0 \tau, \tag{59.15 a}$$

$$u_2 = \frac{p_{0y}}{m_0 c}, \tag{59.15 b}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$u_3 = \frac{p_{0z}}{m_0 c}, \tag{59.15 c}$$

$$u_4 = \frac{p_{ox}}{m_0 c} sh\ \omega_0\tau - \frac{W_0}{m_0 c^2} ch\ \omega_0\tau . \tag{59.15 d}$$

Ţinând cont că

$$u_1 = \frac{1}{c}\frac{dx}{d\tau}, \quad u_2 = \frac{1}{c}\frac{dy}{d\tau}, \quad u_3 = \frac{1}{c}\frac{dz}{d\tau}, \quad u_4 = -\frac{1}{c}\frac{dx^4}{d\tau} = -\frac{dt}{d\tau}, \tag{59.16}$$

şi integrând, se găseşte

$$x = c\int u_1 d\tau = c\int\left(\frac{p_{0x}}{m_0 c} ch\ \omega_0\tau - \frac{W_0}{m_0 c^2} sh\ \omega_0\tau\right) d\tau = \frac{p_{0x}}{m_0\omega_0} sh\ \omega_0\tau - \frac{W_0}{m_0\omega_0 c} ch\ \omega_0\tau + b_1 . \tag{59.17 a}$$

În mod analog, se obţine

$$y = c\int u_2 d\tau = c\int\frac{p_{0y}}{m_0 c} d\tau = \frac{p_{0y}}{m_0}\tau + b_2, \tag{59.17 b}$$

$$z = c\int u_3 d\tau = c\int\frac{p_{0z}}{m_0 c} d\tau = \frac{p_{0z}}{m_0}\tau + b_3, \tag{59.17 c}$$

$$-t = \int u_4 d\tau = \int\left(\frac{p_{ox}}{m_0 c} sh\ \omega_0\tau - \frac{W_0}{m_0 c^2} ch\ \omega_0\tau\right) d\tau = \frac{p_{0x}}{m_0\omega_0 c} ch\ \omega_0\tau - \frac{W_0}{m_0\omega_0 c^2} sh\ \omega_0\tau + b_4 . \tag{59.17 d}$$

Constantele arbitrare de integrare b_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$ pot fi determinate din condiţiile iniţiale pentru coordonate (scrise mai sus). Rezultă imediat că

$$b_1 = \frac{W_0}{m_0\omega_0 c}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -\frac{p_{0x}}{m_0\omega_0 c}. \tag{59.18}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În fine, înlocuind aceste constante în expresiile care dau coordonatele spaţiale şi pe cea temporală, se găseşte că

$$\begin{cases} x = \dfrac{p_{0x}}{m_0\omega_0} sh\ \omega_0\tau + \dfrac{W_0}{m_0\omega_0 c}(1 - ch\ \omega_0\tau), \\ y = \dfrac{p_{0y}}{m_0}\tau, \\ z = \dfrac{p_{0z}}{m_0}\tau, \\ t = \dfrac{p_{0x}}{m_0\omega_0 c}(1 - ch\ \omega_0\tau) + \dfrac{W_0}{m_0\omega_0 c^2} sh\ \omega_0\tau. \end{cases} \tag{59.19}$$

Pentru a determina mişcarea în referenţialul inerţial al laboratorului, S, adică $x = x(t)$, $y = y(t)$ şi $z = z(t)$, trebuie ca timpul propriu τ să fie exprimat ca funcţie de timpul scurs în referenţialul S. Acest lucru se poate face cu uşurinţă utilizând ultima relaţie din sistemul de mai sus. Ţinând cont că $\sinh\xi = \dfrac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2}$ şi $\cosh\xi = \dfrac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2}$, rezultă o ecuaţie de gradul doi în $e^{\omega_0\tau}$. Într-adevăr,

$$t = \frac{p_{0x}}{m_0\omega_0 c}(1 - \cosh\omega_0\tau) + \frac{W_0}{m_0\omega_0 c^2}\sinh\omega_0\tau = \frac{p_{0x}}{m_0\omega_0 c}\left(1 - \frac{e^{\omega_0\tau} + e^{-\omega_0\tau}}{2}\right) + \frac{W_0}{m_0\omega_0 c^2}\cdot\frac{e^{\omega_0\tau} - e^{-\omega_0\tau}}{2}, \tag{59.20}$$

sau, folosind notaţia $e^{\omega_0\tau} = \lambda$,

$$t = \frac{p_{0x}}{m_0\omega_0 c}\left(1 - \frac{\lambda + \lambda^{-1}}{2}\right) + \frac{W_0}{m_0\omega_0 c^2}\frac{\lambda - \lambda^{-1}}{2}, \tag{59.21}$$

adică

$$\lambda^2(q - r) - 2(t - r)\lambda - (q + r) = 0, \tag{59.22}$$

unde s-au utilizat notaţiile: $r = \dfrac{p_{0x}}{m_0\omega_0 c}$ şi $q = \dfrac{W_0}{m_0\omega_0 c^2}$.

Soluţiile ecuaţiei de gradul doi în λ sunt

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\lambda_{1,2}=\frac{t-r\pm\sqrt{(t-r)^2+(q+r)(q-r)}}{q-r}, \tag{59.23}$$

sau, revenind la mărimile inițiale și reținând doar soluția acceptabilă din punct de vedere fizic (λ trebuie să fie pozitiv)

$$\lambda=e^{\omega_0\tau}=\frac{eEt-p_{0x}+\sqrt{(eEt-p_{0x})^2+m_0^2c^2+p_{0y}^2+p_{0z}^2}}{\frac{W_0}{c}-p_{0x}}, \tag{59.24}$$

de unde

$$\tau=\frac{1}{\omega_0}\ln\frac{eEt-p_{0x}+\sqrt{(eEt-p_{0x})^2+m_0^2c^2+p_{0y}^2+p_{0z}^2}}{\frac{W_0}{c}-p_{0x}}. \tag{59.25}$$

Cu τ astfel determinat în expresiile care dau pe $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$ și $z=z(\tau)$, rezultă în fine

$$x(t)=\frac{c}{eE}\left[\frac{W_0}{c}-\sqrt{(eEt-p_{0x})^2+m_0^2c^2+p_{0y}^2+p_{0z}^2}\right], \tag{59.26 a}$$

$$y(t)=\frac{cp_{0y}}{eE}\ln\frac{eEt-p_{0x}+\sqrt{(eEt-p_{0x})^2+m_0^2c^2+p_{0y}^2+p_{0z}^2}}{\frac{W_0}{c}-p_{0x}}, \tag{59.26 b}$$

$$z(t)=\frac{cp_{0z}}{eE}\ln\frac{eEt-p_{0x}+\sqrt{(eEt-p_{0x})^2+m_0^2c^2+p_{0y}^2+p_{0z}^2}}{\frac{W_0}{c}-p_{0x}}. \tag{59.26 c}$$

În limita nerelativistă ($p_0\ll m_0c$ și $t\ll m_0c/eE$), se obține

$$x(t)=\frac{p_{0x}}{m_0}t-\frac{eE}{2m_0}t^2, \tag{59.27 a}$$

$$y(t)=\frac{p_{0y}}{m_0}t, \tag{59.27 b}$$

$$z(t)=\frac{p_{0z}}{m_0}t. \tag{59.27 c}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Într-adevăr, în aproximaţia considerată, putem scrie

$$\sqrt{(eEt-p_{0x})^2+m_0^2c^2+p_{0y}^2+p_{0z}^2}=\sqrt{e^2E^2t^2-2eEp_{0x}t+m_0^2c^2+p_0^2}\overset{p_0\ll m_0c}{\cong}$$

$$\sqrt{e^2E^2t^2-2eEp_{0x}t+m_0^2c^2}=m_0c\sqrt{1-\frac{2eEp_{0x}t}{m_0^2c^2}+\frac{e^2E^2t^2}{m_0^2c^2}}\cong m_0c\sqrt{1-\xi}\ ,$$

unde am introdus notaţia evidentă $\xi\equiv\frac{2eEp_{0x}t}{m_0^2c^2}-\frac{e^2E^2t^2}{m_0^2c^2}$, cu $\xi\ll 1$. Atunci, având în vedere dezvoltarea în serie Mac-Laurin a funcţiei $f(\xi)=\sqrt{1-\xi}=1-\frac{\xi}{2}+\mathcal{O}(\xi^2)$ şi oprindu-ne la termenul de ordinul întâi, avem

$$m_0c\sqrt{1-\xi}\cong m_0c\left(1-\frac{eEp_{0x}t}{m_0^2c^2}+\frac{1}{2}\frac{e^2E^2t^2}{m_0^2c^2}\right)$$

iar din (59. 26 a) rezultă

$$x(t)=\frac{c}{eE}\left[\frac{W_0}{c}-\sqrt{(eEt-p_{0x})^2+m_0^2c^2+p_{0y}^2+p_{0z}^2}\right]=\frac{W_0}{eE}-$$

$$\frac{c}{eE}\sqrt{(eEt-p_{0x})^2+m_0^2c^2+p_{0y}^2+p_{0z}^2}\cong\frac{W_0}{eE}-\frac{m_0c^2}{eE}\left(1-\frac{eEp_{0x}t}{m_0^2c^2}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{e^2E^2t^2}{m_0^2c^2}\right)=\frac{p_{0x}}{m_0}t-\frac{1}{2}\frac{eE}{m_0}t^2,$$

unde am ţinut cont că (în aproximaţia considerată) $W_0\approx m_0c^2$. Astfel, relaţia (59.27 a) este demonstrată. Pentru a justifica şi celelalte două relaţii rămase [(59.27 b) şi [(59.27 c)] să observăm că, oprindu-ne doar la primul termen din dezvoltarea în serie a funcţiei $f(\xi)$, putem scrie

$$\sqrt{(eEt-p_{0x})^2+m_0^2c^2+p_{0y}^2+p_{0z}^2}\cong m_0c$$

şi atunci

$$\frac{eEt-p_{0x}+\sqrt{(eEt-p_{0x})^2+m_0^2c^2+p_{0y}^2+p_{0z}^2}}{\frac{W_0}{c}-p_{0x}}\cong\frac{eEt-p_{0x}+m_0c}{\frac{W_0}{c}-p_{0x}}\cong$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\frac{eEt-p_{0x}+m_0c}{m_0c-p_{0x}}\cong\frac{eEt+m_0c}{m_0c}=1+\frac{eEt}{m_0c}.$$

Apoi, având în vedere dezvoltarea în serie

$$\ln(1+\zeta)=\zeta-\frac{\zeta^2}{2}+\frac{\zeta^3}{3}-\frac{\zeta^4}{4}+\cdots=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\zeta^n}{n},$$

în care $\zeta\equiv\frac{eEt}{m_0c}\ll 1$ şi oprindu-ne la primul termen al acesteia, din (59.26 b) rezultă

$$y(t)=\frac{cp_{0y}}{eE}\ln\frac{eEt-p_{0x}+\sqrt{(eEt-p_{0x})^2+m_0^2c^2+p_{0y}^2+p_{0z}^2}}{\frac{W_0}{c}-p_{0x}}\cong$$

$$\frac{cp_{0y}}{eE}\ln(1+\zeta)\cong\frac{cp_{0y}}{eE}\zeta=\frac{cp_{0y}}{eE}\frac{eEt}{m_0c}=\frac{p_{0y}}{m_0}t\ ,$$

ceea ce demonstrează (59.27 b). În mod cu totul asemănător se demonstrează şi (59.27 c).

Se poate observa că în cazul nerelativist mişcarea de-a lungul axei Ox este uniform accelerată, cu acceleraţia $\frac{eE}{m_0}$. Graficul acestei mişcări este prezentat în Fig. 59.1 (prima parte a liniei pline).

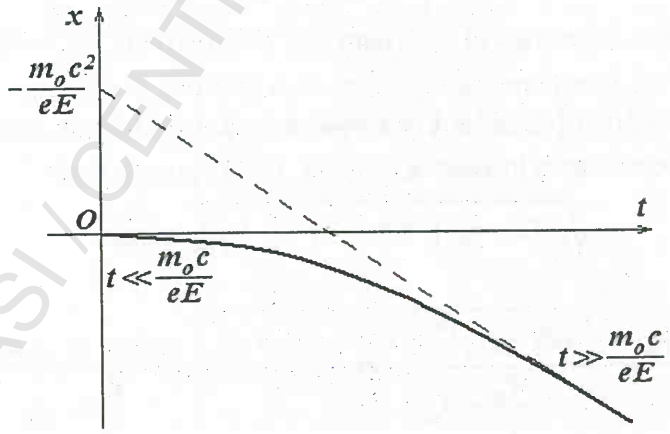


Fig. 59. 1

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

După un timp suficient de lung ($t \gg m_0c/eE$) viteza particulei devine relativistă ($v \simeq c$), chiar dacă la momentul inițial era foarte mică.

În limita ultrarelativistă ($v \cong c$)

$$x(t) = \frac{m_0c^2}{eE} - ct, \tag{59.28 a}$$

$$y(t) = \frac{cp_{0y}}{eE} \ln \frac{2eEt}{m_0c}, \tag{59.28 b}$$

$$z(t) = \frac{cp_{0z}}{eE} \ln \frac{2eEt}{m_0c}, \tag{59.28 c}$$

Într-adevăr, în acest caz avem

$$\sqrt{(eEt - p_{0x})^2 + m_0^2c^2 + p_{0y}^2 + p_{0z}^2} = \sqrt{e^2E^2t^2 - 2eEp_{0x}t + m_0^2c^2 + p_0^2} \overset{t \gg m_0c/eE}{\cong}$$

$$\sqrt{e^2E^2t^2} = eEt,$$

iar din (59.26 a) rezultă

$$x(t) = \frac{c}{eE}\left[\frac{W_0}{c} - \sqrt{(eEt - p_{0x})^2 + m_0^2c^2 + p_{0y}^2 + p_{0z}^2}\right] = \frac{c}{eE}\frac{W_0}{c} - \frac{c}{eE} \times$$

$$\sqrt{(eEt - p_{0x})^2 + m_0^2c^2 + p_{0y}^2 + p_{0z}^2} \cong \frac{c}{eE}\frac{m_0c^2}{c} - \frac{c}{eE}\sqrt{(eEt)^2} = \frac{m_0c^2}{eE} - ct,$$

adică relația (59.28 a). Pentru $y(t)$ putem scrie [utilizând (59.26 b) și inegalitatea $t \gg m_0c/eE$]

$$y(t) = \frac{cp_{0y}}{eE} \ln \frac{eEt - p_{0x} + \sqrt{(eEt - p_{0x})^2 + m_0^2c^2 + p_{0y}^2 + p_{0z}^2}}{\frac{W_0}{c} - p_{0x}} \cong$$

$$\frac{cp_{0y}}{eE} \ln \frac{eEt - p_{0x} + \sqrt{(eEt)^2}}{\frac{m_0c^2}{c} - p_{0x}} \cong \frac{cp_{0y}}{eE} \ln \frac{2eEt}{m_0c}$$

și asemănător pentru $z(t)$.

Graficul acestei mișcări (în limita ultrarelativistă) este reprezentat în Fig. 59.1 (linia punctată) și Fig. 59.2.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

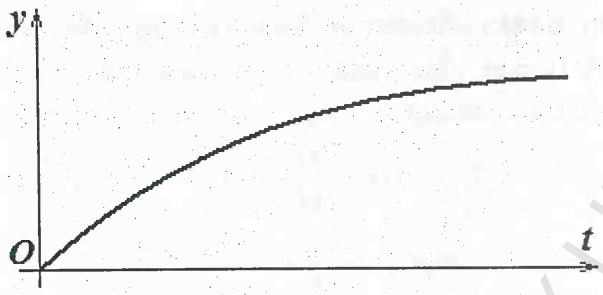


Fig. 59.2

Problema nr. 60

Să se studieze mişcarea relativistă a unui electron într-un câmp magnetic uniform, $\vec{B}$, utilizând formalismul cuadridimensional.

Rezolvare

La fel ca în aplicaţia precedentă, presupunem că la momentul iniţial particula are impulsul $\vec{p}_0$ dat şi se găseşte în originea sistemului de coordonate propriu, a cărui axă Oz este îndreptată în direcţia şi sensul câmpului magnetic.

Considerăm şi aici ecuaţiile de mişcare covariante sub forma

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 u^i) = eF^{ik}u_k, \tag{60.1}$$

cu timpul propriu τ ca parametru. În acest caz, tensorul câmpului electromagnetic F_{ik} este

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & B & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{60.2 a}$$

iar F^{ik} are forma

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\left(F^{ik}\right)=\begin{pmatrix} 0 & B & 0 & 0 \\ -B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (60.2\ b)$$

Ţinând cont că sarcina electronului este negativă şi luând $e>0$, ecuaţiile de mişcare se scriu astfel

$$\begin{cases} m_0\dfrac{du_1}{d\tau}=-eBu_2\ , \\ m_0\dfrac{du_2}{d\tau}=eBu_1\ , \\ m_0\dfrac{du_3}{d\tau}=0\ , \\ m_0\dfrac{du_4}{d\tau}=0\ . \end{cases} \qquad (60.3)$$

Din prima ecuaţie a sistemului de mai sus obţinem succesiv

$$m_0\frac{du_1}{d\tau}=-eBu_2\Rightarrow u_2=-\frac{m_0}{eB}\frac{du_1}{d\tau}\Rightarrow\frac{du_2}{d\tau}=-\frac{m_0}{eB}\frac{d^2u_1}{d\tau^2}, \qquad (60.4)$$

care, introdusă în ecuaţia a doua a sistemului, conduce la următoarea ecuaţie diferenţială de ordinul doi pentru u_1:

$$-\frac{m_0^2}{eB}\frac{d^2u_1}{d\tau^2}=eBu_1\Rightarrow\frac{d^2u_1}{d\tau^2}=-\left(\frac{eB}{m_0}\right)^2u_1=-\omega_0^2u_1, \qquad (60.5)$$

unde am folosit notaţia $\omega_0=\dfrac{eB}{m_0}$.

Pentru u_1 rezultă atunci

$$u_1=A_1\sin(\omega_0\tau+\alpha), \qquad (60.6\ a)$$

unde A_1 şi α sunt două constante arbitrare de integrare. Cu u_1 astfel determinat în prima ecuaţie a sistemului rezultă soluţia pentru u_2. Avem

$$m_0\frac{du_1}{d\tau}=-eBu_2\Leftrightarrow u_2=-\frac{1}{\omega_0}\frac{du_1}{d\tau}=-\frac{1}{\omega_0}\omega_0A_1\cos(\omega_0\tau+\alpha)=-A_1\cos(\omega_0\tau+\alpha) \qquad (60.6\ b)$$

Din ecuaţiile trei şi patru ale sistemului rezultă simplu

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$u_3 = A_3, \tag{60.6 c}$$

$$u_4 = A_4, \tag{60.6 d}$$

unde A_3 şi A_4 sunt, de asemenea, constante arbitrare de integrare.

Condiţiile iniţiale – presupunând că originea timpului propriu τ coincide cu momentul iniţial – sunt

$$u_{10} = \frac{p_{0x}}{m_0 c}; \quad x_0 = 0, \tag{60.7 a}$$

$$u_{20} = \frac{p_{0y}}{m_0 c}; \quad y_0 = 0, \tag{60.7 b}$$

$$u_{30} = \frac{p_{0z}}{m_0 c}; \quad z_0 = 0, \tag{60.7 c}$$

$$u_{40} = -\frac{W_0}{m_0 c^2}; \quad \tau_0 = t_0 = 0, \tag{60.7 d}$$

deoarece cuadrivectorul impuls este

$$p_i = \left(\vec{p}, -\frac{W}{c}\right), \tag{60.8}$$

şi cum $p_i = m_0 c u_i$, avem

$$u_1 = \frac{p_1}{m_0 c}; \quad u_2 = \frac{p_2}{m_0 c}; \quad u_3 = \frac{p_3}{m_0 c}; \quad u_4 = \frac{p_4}{m_0 c} = -\frac{W}{m_0 c^2}. \tag{60.9}$$

În relaţiile de mai sus W_0 este energia totală a particulei la momentul iniţial, p_{0x}, p_{0y} şi p_{0z} sunt valorile iniţiale ale proiecţiei impulsului pe cele trei axe de coordonate, iar $u_{i0} = u_i(\tau_0) = u_i(\tau = 0)$.

Condiţiile iniţiale considerate determină constantele de integrare A_i $(i = 1, 3, 4)$ şi α. Avem

$$\frac{p_{0x}}{m_0 c} = A_1 \sin\alpha,$$

$$\frac{p_{0y}}{m_0 c} = -A_1 \cos\alpha,$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$A_3 = \frac{p_{0z}}{m_0 c}\,,$$
$$A_4 = -\frac{W_0}{m_0 c^2}\,. \tag{60.10}$$

Din primele două relații rezultă că

$$tg\ \alpha = -\frac{p_{0x}}{p_{0y}} \Rightarrow \alpha = -arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}} \tag{60.11}$$

și

$$A_1 = \frac{1}{m_0 c}\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}\,, \tag{60.12}$$

iar soluția sistemului de ecuații inițial va fi

$$u_1 = \frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{m_0 c}\sin\left(\omega_0\tau - arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right),$$
$$u_2 = -\frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{m_0 c}\cos\left(\omega_0\tau - arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right), \tag{60.13}$$
$$u_3 = \frac{p_{0z}}{m_0 c},$$
$$u_4 = -\frac{W_0}{m_0 c^2}.$$

Ținând cont că

$$u_1 = \frac{1}{c}\frac{dx}{d\tau},\quad u_2 = \frac{1}{c}\frac{dy}{d\tau},\quad u_3 = \frac{1}{c}\frac{dz}{d\tau}\ \text{și}\ u_4 = -\frac{1}{c}\frac{dx^4}{d\tau} = -\frac{dt}{d\tau} \tag{60.14}$$

și integrând încă o dată se găsește

$$x = c\int u_1 d\tau = c\int\frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{m_0 c}\sin\left(\omega_0\tau - arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right)d\tau = \tag{60.15 a}$$
$$-\frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\cos\left(\omega_0\tau - arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right) + B_1\,.$$

În mod analog, se obține

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$y = c\int u_2 d\tau = -c\int \frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{m_0 c}\cos\left(\omega_0\tau - arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right)d\tau = -\frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\sin\left(\omega_0\tau - arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right) + B_2\,, \tag{60.15 b}$$

$$z = c\int u_3 d\tau = c\int \frac{p_{0z}}{m_0 c}\,d\tau = \frac{p_{0z}}{m_0}\tau + B_3\,, \tag{60.15 c}$$

şi

$$-t = \int u_4 d\tau = -\int \frac{W_0}{m_0 c^2}\,d\tau = -\frac{W_0}{m_0 c^2}\tau + B_4\,. \tag{60.15 d}$$

Constantele arbitrare de integrare B_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$ se determină din condiţiile iniţiale pentru coordonate, scrise mai sus. Astfel, avem

$$0 = -\frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\cos\left(-arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right) + B_1\,, \tag{60.16}$$

$$0 = -\frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\sin\left(-arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right) + B_2\,, \tag{60.17}$$

$$B_3 = B_4 = 0\,. \tag{60.18}$$

Ţinând cont de formulele trigonometrice

$$\sin\xi = \frac{tg\xi}{\sqrt{1+tg^2\xi}}; \quad \cos\xi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\xi}}, \tag{60.19}$$

se poate scrie

$$B_1 = \frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\cos\left(-arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right) = \frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\cos\left(arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right) = \frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\left(arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right)}} = \frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right)^2}} = \frac{p_{0y}}{eB} \tag{60.20}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi

$$B_2 = -\frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\sin\left(arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right) = -\frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\times$$

$$\frac{tg\left(arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right)}{\sqrt{1+tg^2\left(arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right)}} = -\frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\frac{\frac{p_{0x}}{p_{0y}}}{\sqrt{1+\left(\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right)^2}} = -\frac{p_{0x}}{eB}. \qquad (60.21)$$

În fine, înlocuind aceste constante în expresiile care dau coordonatele spaţiale x, y, z şi cea temporală, t, se obţin următoarele expresii:

$$x(\tau) = \frac{p_{0y}}{eB} - \frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\cos\left(\omega_0\tau - arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right), \qquad (60.22\text{ a})$$

$$y(\tau) = -\frac{p_{0x}}{eB} - \frac{\sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2}}{eB}\sin\left(\omega_0\tau - arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right), \qquad (60.22\text{ b})$$

$$z(\tau) = \frac{p_{0z}}{m_0}\tau \qquad (60.22\text{ c})$$

şi

$$t(\tau) = \frac{W_0}{m_0c^2}\tau. \qquad (60.22\text{ d})$$

Pentru a determina mişcarea în referenţialul inerţial al laboratorului, S, adică $x = x(t)$, $y = y(t)$ şi $z = z(t)$ trebuie ca timpul propriu τ să fie exprimat în funcţie de timpul scurs în referenţialul S. Acest lucru rezultă imediat din ultima relaţie de mai sus

$$\tau = \frac{m_0c^2}{W_0}t. \qquad (60.23)$$

Cu $\tau(t)$ astfel determinat în relaţiile pentru $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$ şi $z = z(\tau)$, se găseşte că

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$x(t)=\frac{p_{0y}}{eB}-\frac{\sqrt{p_{0x}^2+p_{0y}^2}}{eB}\cos\left(\frac{m_0\omega_0c^2}{W_0}t-arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right), \qquad (60.24\text{ a})$$

$$y(t)=-\frac{p_{0x}}{eB}-\frac{\sqrt{p_{0x}^2+p_{0y}^2}}{eB}\sin\left(\frac{m_0\omega_0c^2}{W_0}t-arctg\frac{p_{0x}}{p_{0y}}\right), \qquad (60.24\text{ b})$$

$$z(t)=\frac{p_{0z}c^2}{W_0}t\,. \qquad (60.24\text{ c})$$

Dacă se introduc notațiile

$$\omega_1=\omega_0\frac{m_0c^2}{W_0}, \qquad (60.25)$$

$$p_{01}=\sqrt{p_{0x}^2+p_{0y}^2}\,, \qquad (60.26)$$

şi se ține cont că $arctg\left(p_{0x}/p_{0y}\right)=-\alpha$, legea de mişcare a electronului capătă forma

$$\begin{cases} x(t)=\dfrac{p_{0y}}{eB}-\dfrac{p_{01}}{eB}\cos\left(\omega_1t+\alpha\right), \\ y(t)=-\dfrac{p_{0x}}{eB}-\dfrac{p_{01}}{eB}\sin\left(\omega_1t+\alpha\right), \\ z(t)=\dfrac{p_{0z}c^2}{W_0}t. \end{cases} \qquad (60.27)$$

Traiectoria electronului este deci o elice înfăşurată pe cilindrul circular drept de rază R şi axă Oz (direcția câmpului magnetic uniform), cu

$$R=\frac{p_{01}}{eB}=\frac{\sqrt{p_{0x}^2+p_{0y}^2}}{eB}, \qquad (60.28)$$

având pasul constant

$$\delta=v_zT=\frac{p_{0z}c^2}{W_0}\frac{2\pi}{\omega_1}=\frac{2\pi p_{0z}c^2W_0}{W_0\omega_0m_0c^2}=\frac{2\pi p_{0z}}{eB}. \qquad (60.29)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 61

Să se studieze mişcarea relativistă a unei particule electrizate cu masa de repaus m_0 şi sarcina electrică q într-un câmp electromagnetic exterior oarecare, $\left(\vec{E},\ \vec{B}\right)$, în cadrul formalismului cuadridimensional.

Rezolvarea analitică a problemei

Ecuaţia de mişcare a unei particule electrizate într-un câmp electromagnetic exterior în cadrul formalismului covariant-relativist se scrie astfel [vezi (60.1)]

$$\frac{d}{d\tau}\left(m_0\overline{u}_i\right)=q\overline{u}^k F_{ik}, \tag{61.1}$$

unde m_0 şi q sunt masa de repaus şi respectiv sarcina electrică a particulei, $\overline{u}^i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$ este cuadrivectorul contravariant al vitezei particulei (componentele lui având dimensiunea unei viteze), τ este timpul scurs în sistemul de referinţă propriu al particulei (referenţialul S'), iar F_{ik} este tensorul covariant al câmpului electromagnetic

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & E_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & E_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & E_z/c \\ -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c & 0 \end{pmatrix}. \tag{61.2}$$

Ecuaţia de mişcare mai poate fi scrisă şi astfel

$$\frac{d}{d\tau}\left(m_0u_i\right)=qu^k F_{ik}, \tag{61.3}$$

unde $u_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$ este cuadrivectorul covariant al vitezei particulei (componentele lui fiind adimensionale). Deoarece $m_0=const.$ (61.3) se mai poate scrie şi astfel

$$\frac{du_i}{d\tau}=\frac{q}{m_0c}cu^k F_{ik}=\omega_0 cu^k F_{ik}=\omega_0 cu^\alpha F_{i\alpha}+\omega_0 cu^4 F_{i4}=$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\omega_0 c u_\alpha F_{i\alpha} - \omega_0 c u_4 F_{i4} \quad \left(\alpha = \overline{1,3}\ ;\ i = \overline{1,4}\right), \tag{61.4}$$

unde s-a folosit notația $\omega_0 = \dfrac{q}{m_0 c}$.

Aşadar, fără a face deocamdată nici un fel de presupuneri şi fără a considera nici un fel de restricţii asupra câmpului electromagnetic, ecuațiile pentru cuadriviteză sunt

$$\frac{du_i}{d\tau} = \omega_0 c u_\alpha F_{i\alpha} - \omega_0 c u_4 F_{i4} \quad \left(\alpha = \overline{1,3}\ ;\ i = \overline{1,4}\right). \tag{61.5}$$

Dând valori indicelui i, rezultă următorul sistem de patru ecuații diferențiale, de ordinul întâi, pentru componentele cuadrivitezei:

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{d\tau} = \omega_0 \left(B_z c u_2 - B_y c u_3 - E_x u_4\right), \\ \dfrac{du_2}{d\tau} = \omega_0 \left(B_x c u_3 - B_z c u_1 - E_y u_4\right), \\ \dfrac{du_3}{d\tau} = \omega_0 \left(B_y c u_1 - B_x c u_2 - E_z u_4\right), \\ \dfrac{du_4}{d\tau} = -\omega_0 \left(E_x u_1 + E_y u_2 + E_z u_3\right). \end{cases} \tag{61.6}$$

Apoi, deoarece

$$u^i = \frac{1}{c}\frac{dx^i}{d\tau},\ u_i = \frac{1}{c}\frac{dx_i}{d\tau}, \tag{61.7}$$

se obține

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = c u_1, \\ \dfrac{dy}{d\tau} = c u_2, \\ \dfrac{dz}{d\tau} = c u_3, \\ \dfrac{dt}{d\tau} = -u_4. \end{cases} \tag{61.8}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Pentru a determina legea de mişcare în sistemul de referinţă al laboratorului (referenţialul S), adică $x = x(t)$, $y = y(t)$ şi $z = z(t)$, trebuie rezolvat un sistem de opt ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi alcătuit din cele două seturi de ecuaţii din sistemele de mai sus. Pentru rezolvarea acestui sistem considerăm următoarele condiţii iniţiale:

$$u_{10} = \frac{p_{0x}}{m_0 c}; \quad x_0 = 0, \tag{61.9 a}$$

$$u_{20} = \frac{p_{0y}}{m_0 c}; \quad y_0 = 0, \tag{61.9 b}$$

$$u_{30} = \frac{p_{0z}}{m_0 c}; \quad z_0 = 0, \tag{61.9 c}$$

$$u_{40} = -\frac{W_0}{m_0 c^2}; \quad \tau_0 = t_0 = 0, \tag{61.9 d}$$

unde W_0 este energia totală a particulei la momentul iniţial, $\tau_0 = t_0 = 0$.

Justificarea considerării condiţiilor iniţiale: deoarece cuadrivectorul contravariant al impulsului este

$$p^i = \left(\vec{p}, \frac{W}{c} \right), \tag{61.10}$$

iar cel covariant este dat de

$$p_i = \left(\vec{p}, -W/c \right), \tag{61.11}$$

rezultă automat primele trei relaţii care exprimă condiţiile iniţiale pentru cuadriviteză. Apoi, cum $p_i = m_0 c u_i$, avem

$$\left(p_4\right)_0 = -W_0/c = m_0 c \left(u_4\right)_0, \tag{61.12}$$

de unde

$$\left(u_4\right)_0 \equiv u_{40} = -\frac{W_0}{m_0 c^2}, \tag{61.13}$$

ceea ce justifică relaţia considerată pentru condiţia iniţială impusă asupra componentei a patra a cuadrivitezei.

Rezolvarea analitică a problemei nu poate continua, deoarece, pe de o parte, nu se cunoaşte în mod concret configuraţia câmpului electromagnetic, iar pe de altă parte, pentru că este extrem de anevoioasă.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă ar fi să rezolvăm numai prima parte a problemei – anume, cea referitoare la componentele cuadrivitezei – tot am avea de rezolvat un sistem de patru ecuații diferențiale de ordinul întâi, cuplate, lucru care este extrem de anevoios în cazul general, când toate cele șase componente ale câmpului electromagnetic sunt nenule, fără a mai vorbi de cazul în care aceste componente ar fi și neuniforme și/sau nestaționare.

Rezolvarea problemei în cazul general poate fi făcută doar numeric, cu ajutorul calculatorului. De aceea, în continuare ne vom opri atenția asupra acestei probleme.

Rezolvarea numerică a problemei

Pentru rezolvarea sistemului de opt ecuații diferențiale de ordinul întâi dedus mai sus, în cazul general, poate fi utilizat algoritmul metodei de integrare numerică de tip Runge-Kutta de ordinul patru, implementat în cadrul soft-ului (specializat atât în calcul analitic cât și numeric) Mathematica 5.0.

În cazul în care particula studiată este un proton cu impulsul inițial de componente

$$p_{0x}=5\cdot10^{-19}\,kg\cdot m\cdot s^{-1},\quad p_{0y}=7{,}5\cdot10^{-19}\,kg\cdot m\cdot s^{-1},\quad p_{0z}=10^{-18}\,kg\cdot m\cdot s^{-1} \tag{61.14}$$

care pleacă la momentul inițial $t_0=\tau_0=0$ din originea sistemului de coordonate $(x_0=y_0=z_0=0)$, și care se mișcă pe durata $\Delta\tau=1{,}2\ s$ (măsurată în sistemul de referință propriu) în câmpul electromagnetic dat de

$$\begin{cases} E_x=5\cos\omega t, \\ E_y=2\cdot10^2\sin\omega t, \\ E_z=0, \\ B_x=1{,}25\cdot10^{-7}, \\ B_y=0, \\ B_z=1{,}2\cdot10^{-7}, \end{cases} \tag{61.15}$$

unde $\omega=1\ s^{-1}$, liniile de comandă asociate problemei sunt date mai jos:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

```
(*************************************************************************)
Needs["Graphics'Colors'"]
Runge3D[a0_, b0_, α_, β_, γ_, δ_, λ_, μ_, ν_, σ_, m0_] :=
    Module[{a = a0, b = b0, j, m = m0},
    h = (b - a)/m;
    P = Table[a + (j - 1) h, {j, 1, m + 1}];
    Z1 = Table[{α, β, γ, δ, λ, μ, ν, σ}, {j, 1, m + 1}];
        For[j = 1, j ≤ m, j++,
            k1 = h F[P[[j]], Z1[[j]]];
            k2 = h F[P[[j]] + h/2, Z1[[j]] + k1/2];
            k3 = h F[P[[j]] + h/2, Z1[[j]] + k2/2];
            k4 = h F[P[[j]] + h, Z1[[j]] + k3];
            Z1[[j+1]] = Z1[[j]] + 1/6 (k1 + 2k2 + 2k3 + k4); ];
    Return[Z1]; ];

m0 = 1.67*10^-27;
q = 1.6*10^-19;
c = 3*10^8;
p0x = 5*10^-19;
p0y = 7.5*10^-19;
p0z = 10*10^-19;
W0 = Sqrt[m0^2 * c^4 + (p0x^2 + p0y^2 + p0z^2) * c^2];
ω0 = q/(m0 * c);
Ex = 5*Cos[t];
Ey = 2*10^2*Sin[t];
Ez = 0;
Bx = 0.125*10^-6;
By = 0;
Bz = 0.12*10^-6;
```


BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$f_1[\tau_,u1_,u2_,u3_,u4_,x_,y_,z_,t_]=\omega_0*(B_z*c*u2-B_y*c*u3-E_x*u4);$

$f_2[\tau_,u1_,u2_,u3_,u4_,x_,y_,z_,t_]=\omega_0*(B_x*c*u3-B_z*c*u1-E_y*u4);$

$f_3[\tau_,u1_,u2_,u3_,u4_,x_,y_,z_,t_]=\omega_0*(B_y*c*u1-B_x*c*u2-E_z*u4);$

$f_4[\tau_,u1_,u2_,u3_,u4_,x_,y_,z_,t_]=-\omega_0*(E_x*u1+E_y*u2+E_z*u3);$

$f_5[\tau_,u1_,u2_,u3_,u4_,x_,y_,z_,t_]=c*u1;$

$f_6[\tau_,u1_,u2_,u3_,u4_,x_,y_,z_,t_]=c*u2;$

$f_7[\tau_,u1_,u2_,u3_,u4_,x_,y_,z_,t_]=c*u3;$

$f_8[\tau_,u1_,u2_,u3_,u4_,x_,y_,z_,t_]=-u4;$

$F[\tau_,\{u1_,u2_,u3_,u4_,x_,y_,z_,t_\}]=$

$\{f_1[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t],f_2[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t],$

$f_3[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t],f_4[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t],$

$f_5[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t],f_6[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t],$

$f_7[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t],f_8[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t]\};$

Print["$u1'=$", $f1[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t]$];

Print["$u2'=$", $f2[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t]$];

Print["$u3'=$", $f3[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t]$];

Print["$u4'=$", $f4[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t]$];

Print["$x'=$", $f5[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t]$];

Print["$y'=$", $f6[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t]$];

Print["$z'=$", $f7[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t]$];

Print["$t'=$", $f8[\tau,u1,u2,u3,u4,x,y,z,t]$];

Print["$F[\tau,\{u1,u2,u3,u4,x,y,z,t\}]=$", $F[\tau,\{u1,u2,u3,u4,x,y,z,t\}]$];

$u1'=0.319361\ (36.\ u2-5\ u4\ \mathrm{Cos}[t])$

$u2'=0.319361\ (-36.\ u1+37.5\ u3-200\ u4\ \mathrm{Sin}[t])$

$u3'=-11.976\ u2$

$u4'=-0.319361\ (5\ u1\ \mathrm{Cos}[t]+200\ u2\ \mathrm{Sin}[t])$

$x'=300000000\ u1$

$y'=300000000\ u2$

$z'=300000000\ u3$

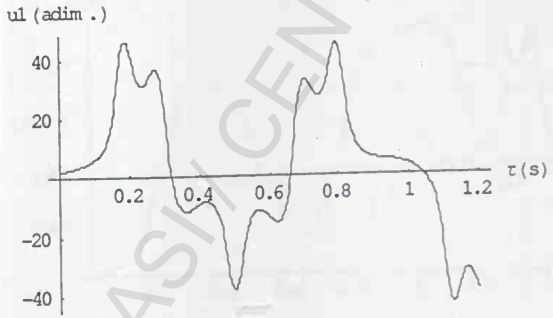
$t'=-u4$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$F[\tau,\{u1,\ u2,\ u3,\ u4,\ x,\ y,\ z,\ t\}]=\{0.319361\ (36.\ u2-5\ u4\ \mathrm{Cos}[t]),$
$0.319361\ (-36.\ u1+37.5\ u3-200\ u4\ \mathrm{Sin}[t]),$
$-11.976\ u2,\ -0.319361\ (5\ u1\ \mathrm{Cos}[t]+200\ u2\ \mathrm{Sin}[t]),$
$300000000\ u1,\ 300000000\ u2,\ 300000000\ u3,\ -u4\}$

$a=0;$
$b=1.2;$
$u10=p_{0x}/(m_0*c);$
$u20=p_{0y}/(m_0*c);$
$u30=p_{0z}/(m_0*c);$
$u40=-W_0/(m_0*c^2);$
$x0=0;$
$y0=0;$
$z0=0;$
$t0=0;$
$n=500;$
$\mathrm{Runge3D}[a,b,u10,u20,u30,u40,x0,y0,z0,t0,n];$

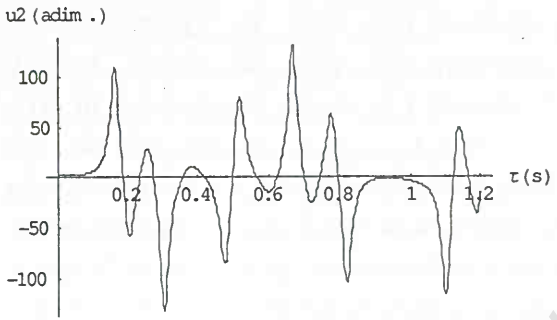
$u1s=\mathrm{Transpose}[\{P,\mathrm{Transpose}[Z1]_{[1]}\}];$
$gru1s1=\mathrm{ListPlot}[u1s,\mathrm{PlotJoined}\rightarrow\mathrm{True},\mathrm{PlotStyle}\rightarrow\mathrm{Black},$
$\mathrm{AxesLabel}\rightarrow\{"\tau(s)","u1(adim.)"\}];$
$\mathrm{Print}["u1=u1[\tau]\ \text{pentru}",a,"\le\tau\le",b];$



u1 = u1[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 1.2

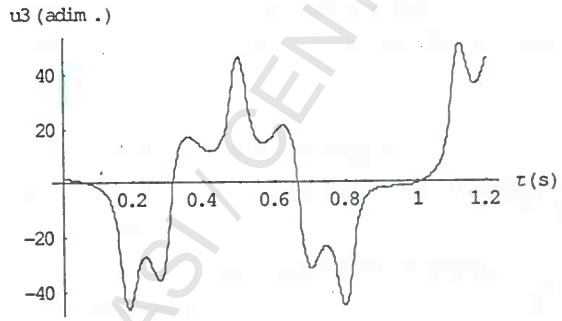
BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

```
u2s = Transpose[{P, Transpose[Z1][[2]]}];
gru2s1 = ListPlot[u2s, PlotJoined → True, PlotStyle → Black,
AxesLabel → {"τ(s)","u2(adim.)"}];
Print["u2 = u2[τ] pentru ",a," ≤ τ ≤ ",b];
```



u2 = u2[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 1.2

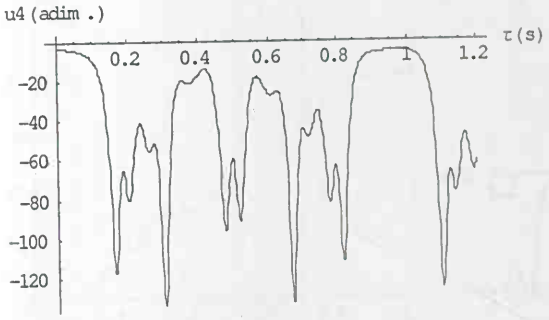
```
u3s = Transpose[{P, Transpose[Z1][[3]]}];
gru3s1 = ListPlot[u3s, PlotJoined → True, PlotStyle → Black,
AxesLabel → {"τ(s)","u3(adim.)"}];
Print["u3 = u3[τ] pentru ",a," ≤ τ ≤ ",b];
```



u3 = u3[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 1.2

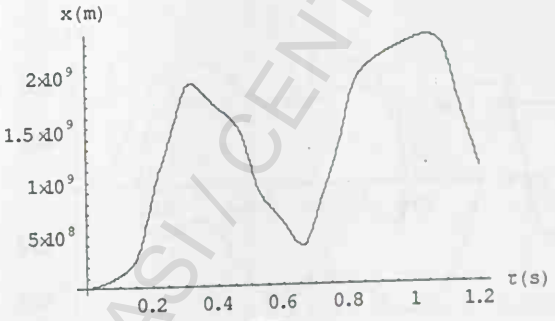
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

```
u4s = Transpose[{P, Transpose[Z1][[4]]}];
gru4s1 = ListPlot[u4s, PlotJoined → True, PlotStyle → Black,
AxesLabel → {"τ(s)","u4(adim.)"}];
Print["u4 = u4[τ] pentru ", a, " ≤ τ ≤ ", b];
```



u4 = u4[τ] pentru $0 \le \tau \le 1.2$

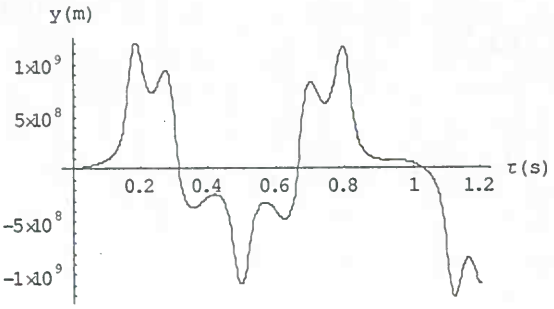
```
xs = Transpose[{P, Transpose[Z1][[5]]}];
grxs1 = ListPlot[xs, PlotJoined → True, PlotStyle → Black,
AxesLabel → {"τ(s)","x(m)"}];
Print["x = x[τ] pentru ", a, " ≤ τ ≤ ", b];
```



x = x[τ] pentru $0 \le \tau \le 1.2$

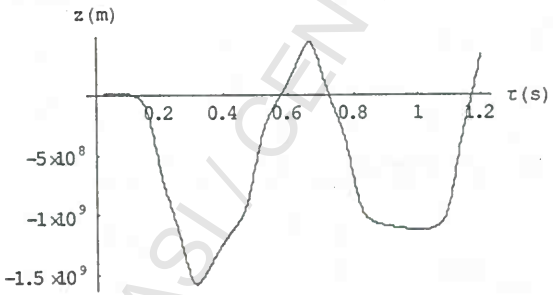
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

```
ys = Transpose[{P, Transpose[Z1][[6]]}];
grys1 = ListPlot[ys, PlotJoined → True, PlotStyle → Black,
AxesLabel → {"τ(s)", "y(m)"}];
Print["y = y[τ] pentru ", a, " ≤ τ ≤ ", b];
```



y = y[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 1.2

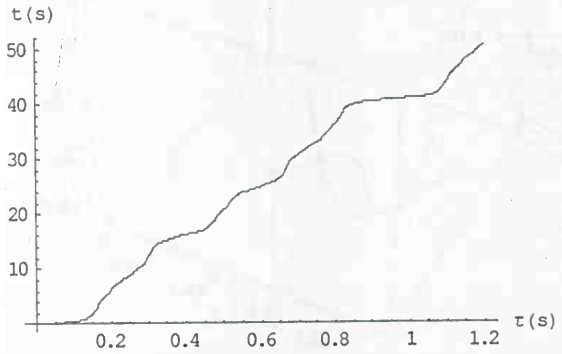
```
zs = Transpose[{P, Transpose[Z1][[7]]}];
grzs1 = ListPlot[zs, PlotJoined → True, PlotStyle → Black,
AxesLabel → {"τ(s)", "z(m)"}];
Print["z = z[τ] pentru ", a, " ≤ τ ≤ ", b];
```



z = z[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 1.2

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

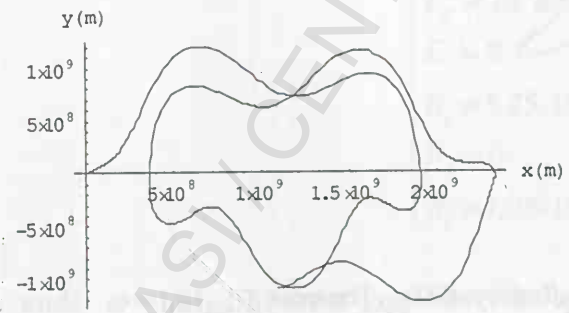
```
ts = Transpose[{P, Transpose[Z1[[8]]}];
grts1 = ListPlot[ts, PlotJoined → True, PlotStyle → Black,
AxesLabel → {"τ(s)","t(s)"}];
Print["t = t[τ] pentru", a, "≤ τ ≤", b];
```



t = t[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 1.2

```
<<Graphics`Graphics3D`
```

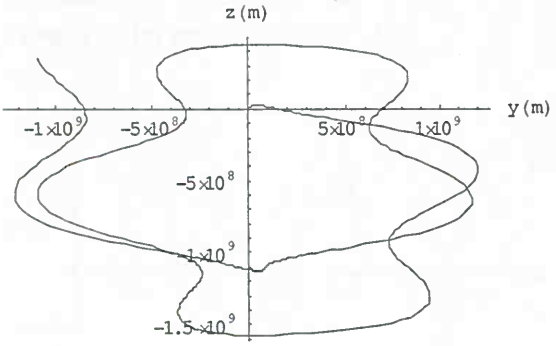
```
scat = Table[Transpose[{Transpose[Z1[[5]]], Transpose[Z1[[6]]}]];
ListPlot[scat, PlotJoined → True, AxesLabel → {"x(m)", "y(m)"}]
```



- Graphics -

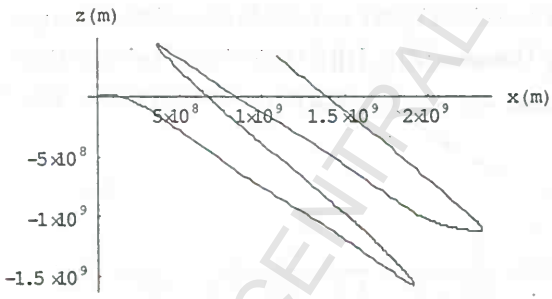
BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

```
scat = Table[Transpose[{Transpose[Z1][[6]], Transpose[Z1][[7]]}]];
ListPlot[scat, PlotJoined → True, AxesLabel → {"y(m)", "z(m)"}]
```



- Graphics -

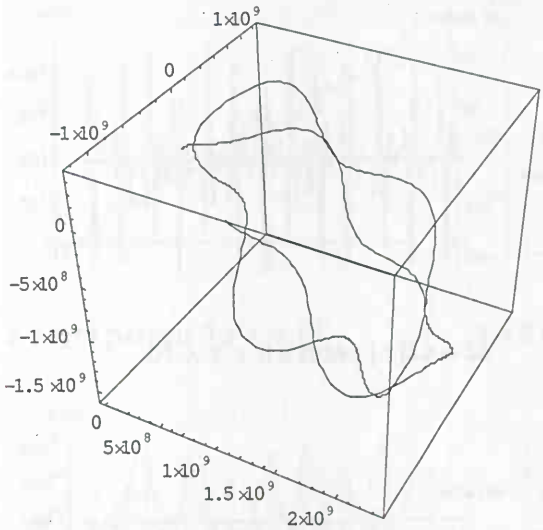
```
scat = Table[Transpose[{Transpose[Z1][[5]], Transpose[Z1][[7]]}]];
ListPlot[scat, PlotJoined → True, AxesLabel → {"x(m)", "z(m)"}]
```



- Graphics -

```
scat = Table[Transpose[{Transpose[Z1][[5]], Transpose[Z1][[6]], Transpose[Z1][[7]]}]];
ScatterPlot3D[scat, PlotJoined → True]
```


BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



- Graphics3D -

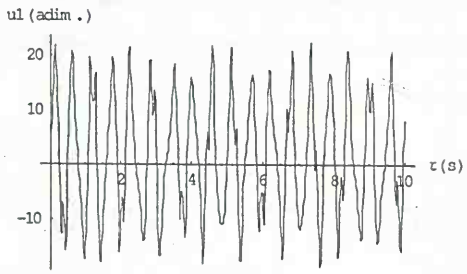
****

În cazul în care durata măsurată în sistemul de referinţă propriu creşte la $\Delta\tau = 10\ s$, iar configuraţia câmpului electromagnetic este dată de

$$\begin{cases} E_x = 50\ \cos\omega t, \\ E_y = 70\ \sin\omega t, \\ E_z = 0, \\ B_x = 1{,}25\cdot 10^{-7}, \\ B_y = 0, \\ B_z = 1{,}25\cdot 10^{-7}, \end{cases} \tag{61.16}$$

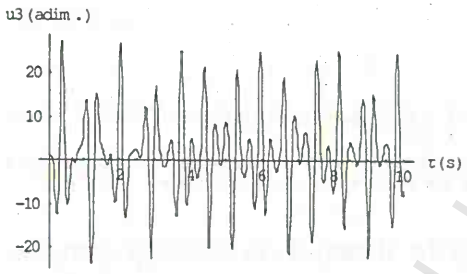
unde $\omega = 1\ s^{-1}$, în locul graficelor de mai sus se obţin – respectiv – următoarele dependenţe:

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

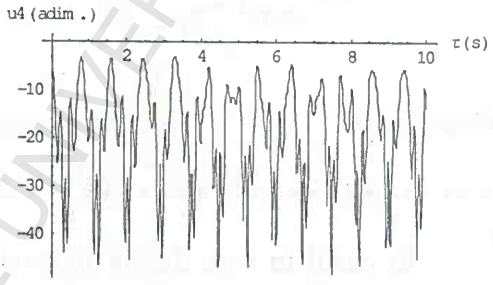


u1 = u1[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$

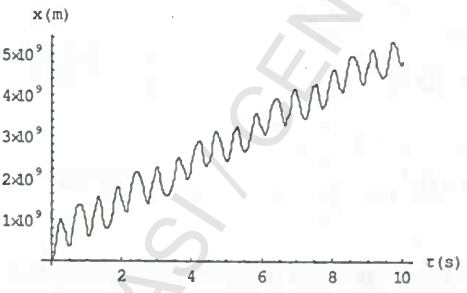
u2 = u2[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$



u3 = u3[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$



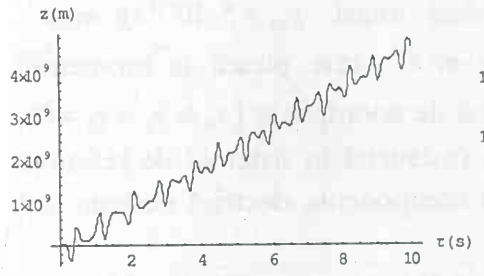
u4 = u4[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$

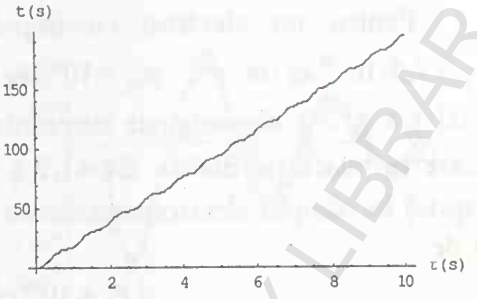


x = x[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$

y = y[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$

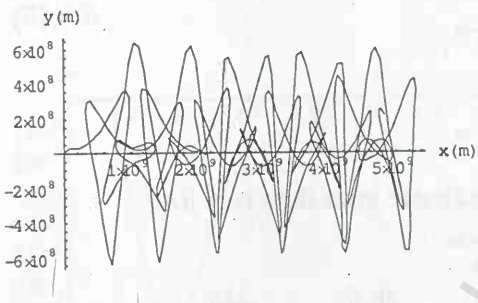
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



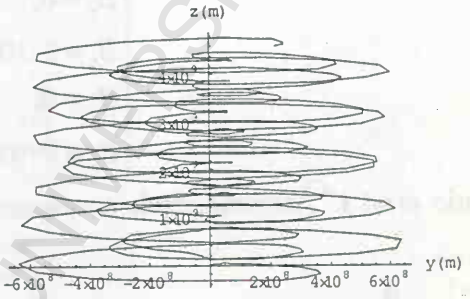


$z = z[\tau]$ pentru $0 \le \tau \le 10$

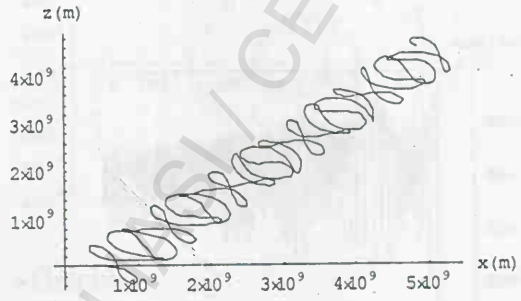
$t = t[\tau]$ pentru $0 \le \tau \le 10$



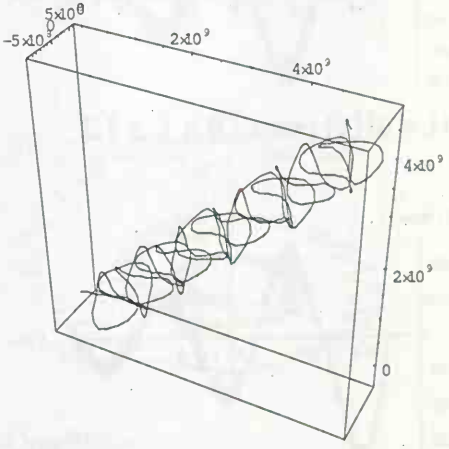
-Graphics-



-Graphics-



-Graphics-



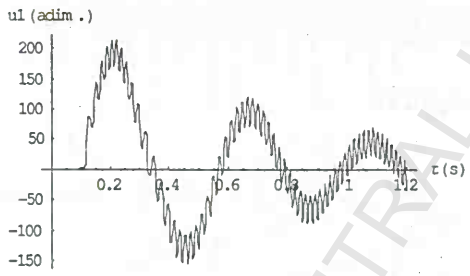
-Graphics3D-

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

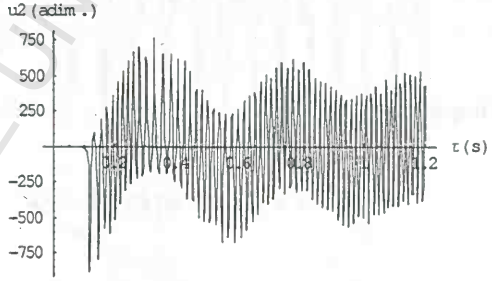
Pentru un electron cu impulsul inițial $p_{0x}=5\cdot10^{-25}\,kg\cdot m\cdot s^{-1}$, $p_{0y}=7{,}5\cdot10^{-25}\,kg\cdot m\cdot s^{-1}$, $p_{0z}=10^{-24}\,kg\cdot m\cdot s^{-1}$, care pleacă la momentul inițial $t_0=\tau_0=0$ din originea sistemului de coordonate ($x_0=y_0=z_0=0$), și care se mișcă pe durata $\Delta\tau=1{,}2\,s$ (măsurată în sistemul de referință propriu) în câmpul electromagnetic cu componenta electrică nestaționară dat de

$$\begin{cases} E_x=10^{-2}\cos\omega t, \\ E_y=8\cdot10^{-1}\sin\omega t, \\ E_z=0, \\ B_x=8\cdot10^{-11}, \\ B_y=0, \\ B_z=9\cdot10^{-11}, \end{cases} \tag{61.17}$$

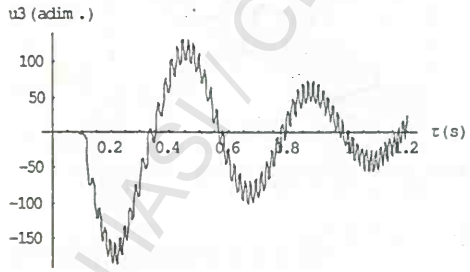
unde $\omega=1\,s^{-1}$, dependențele corespunzătoare sunt date mai jos.



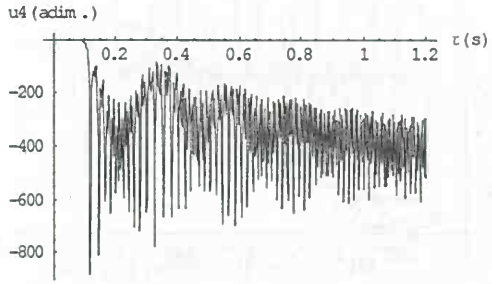
u1 = u1[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 1.2



u2 = u2[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 1.2

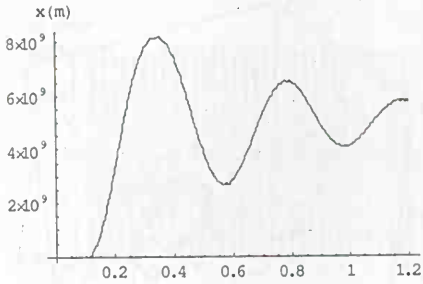


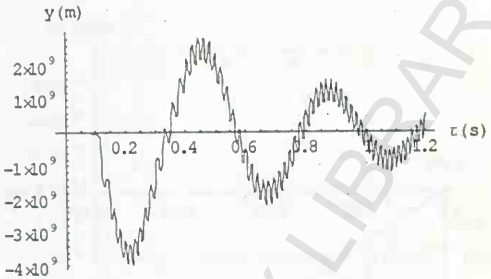
u3 = u3[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 1.2



u4 = u4[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 1.2

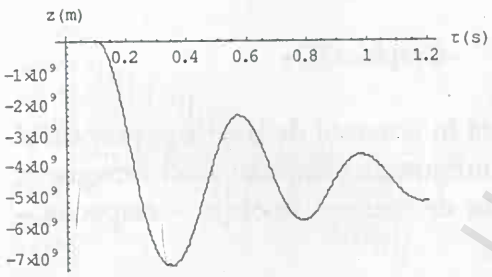
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

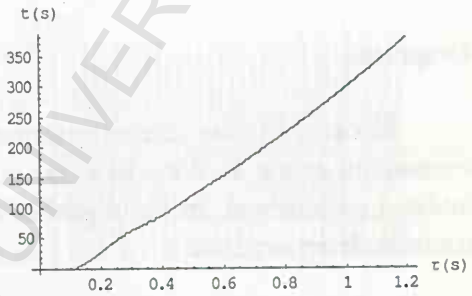




$x = x[\tau]$ pentru $0 \le \tau \le 1.2$

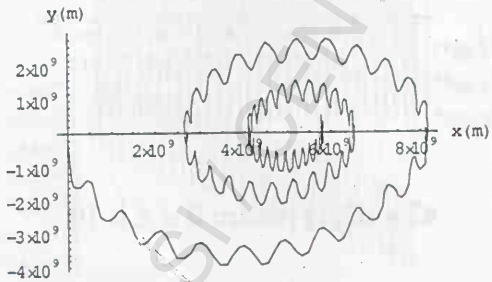
$y = y[\tau]$ pentru $0 \le \tau \le 1.2$



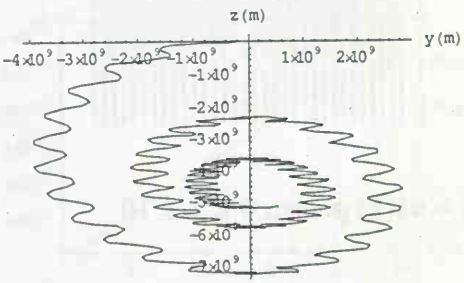


$z = z[\tau]$ pentru $0 \le \tau \le 1.2$

$t = t[\tau]$ pentru $0 \le \tau \le 1.2$

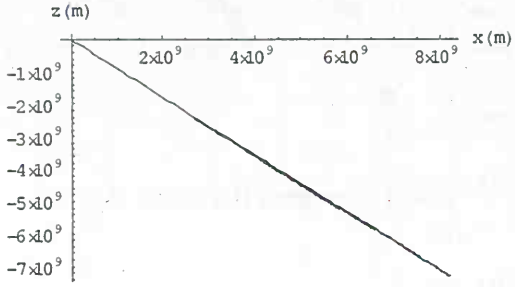


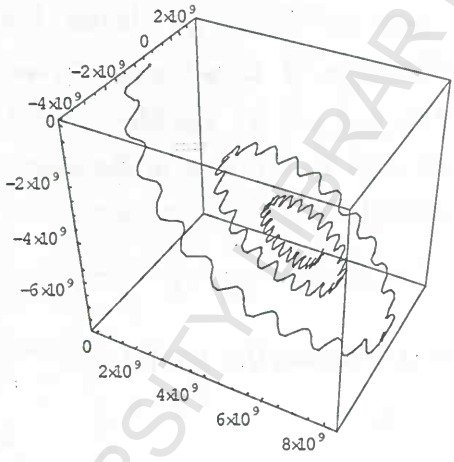
- Graphics -



- Graphics -

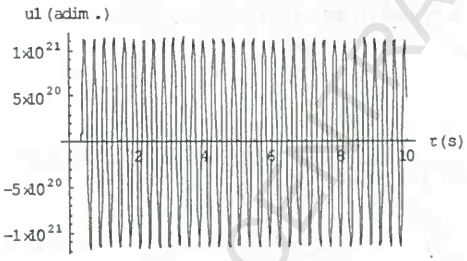
BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

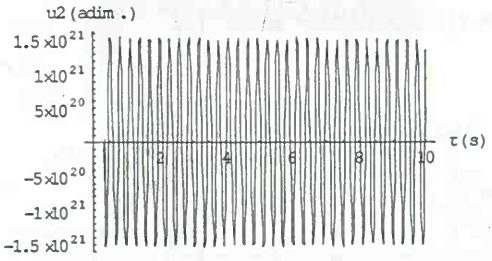




-Graphics- -Graphics3D-

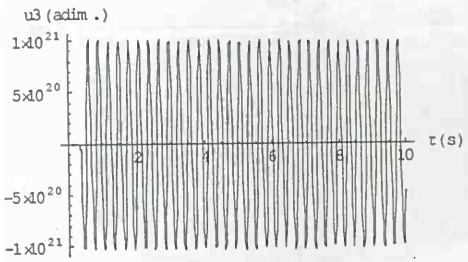
În cazul în care durata măsurată în sistemul de referinţă propriu al electronului creşte la $\Delta\tau = 10\ s$, iar configuraţia câmpului electromagnetic rămâne neschimbată, în locul graficelor de mai sus se obţin – respectiv – următoarele reprezentări:



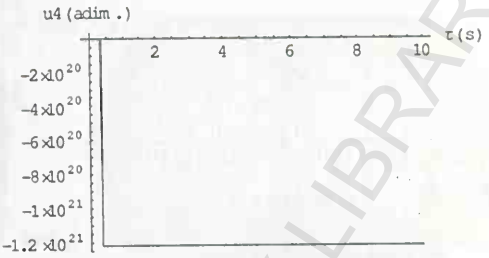


u1 = u1[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$ u2 = u2[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$

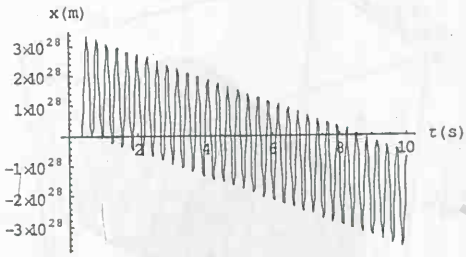
BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



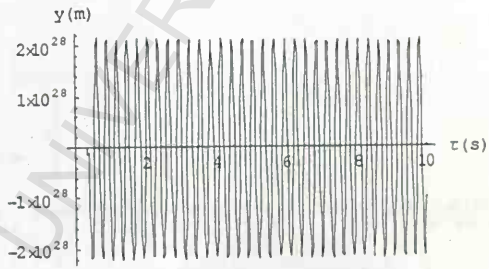
u3 = u3[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$



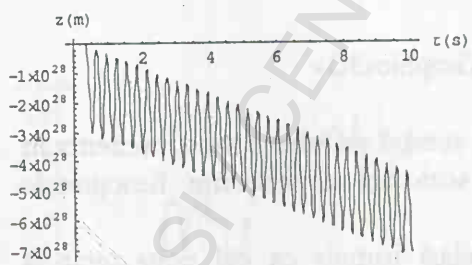
u4 = u4[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$



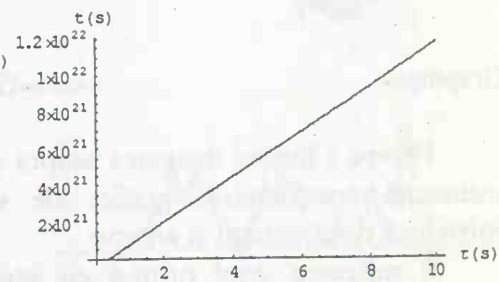
x = x[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$



y = y[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$

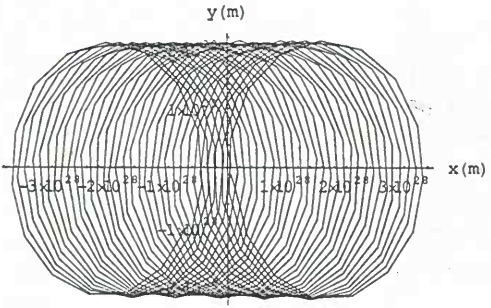


z = z[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$

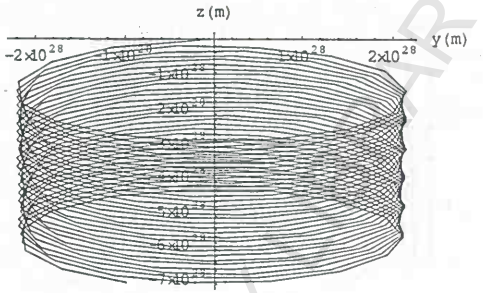


t = t[τ] pentru $0 \le \tau \le 10$

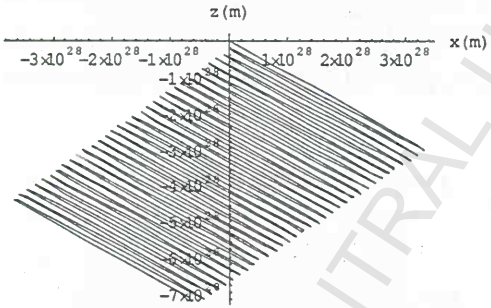
BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



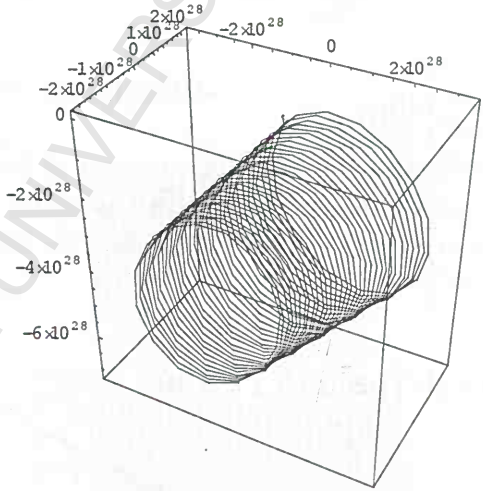
-Graphics-



-Graphics-



-Graphics-



-Graphics3D-

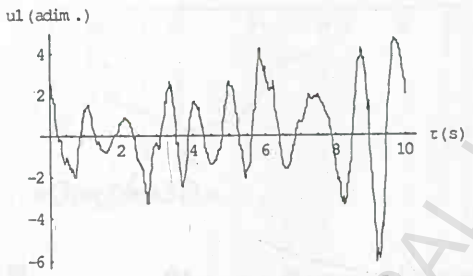
Pentru a întregi imaginea asupra acestei probleme vom prezenta în continuare reprezentările grafice ale aceloraşi dependenţe funcţionale pentru încă două situaţii şi anume:

i) mişcarea unui proton cu acelaşi impuls ca cel considerat la început, pe durata $\Delta\tau = 10\ s$ (măsurată în sistemul de referinţă propriu) în câmpul electromagnetic neuniform cu configuraţia

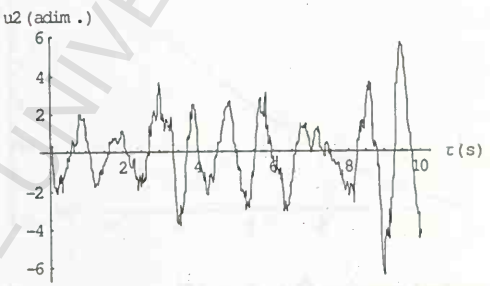
BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\begin{cases} E_x = 50\ \cos\dfrac{\lambda x}{2}\ \sin\lambda y, \\ E_y = 70\ \sin\dfrac{\lambda z}{3}, \\ E_z = 0, \\ B_x = 1{,}25\cdot 10^{-7}\sin\lambda y\ \cos\dfrac{\lambda z}{3}, \\ B_y = 0, \\ B_z = 1{,}25\cdot 10^{-7}\cos^2\dfrac{\lambda y}{3}, \end{cases} \tag{61.18}$$

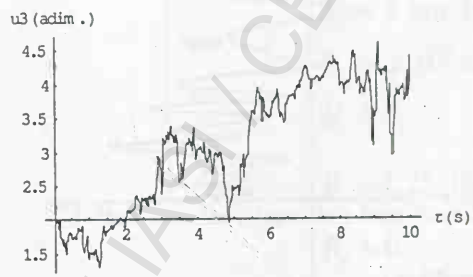
unde $\lambda = 1\ m^{-1}$, caz în care avem



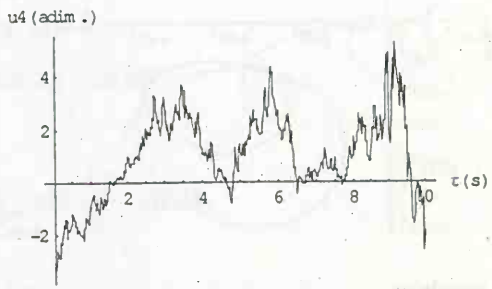
u1 = u1[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 10



u2 = u2[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 10

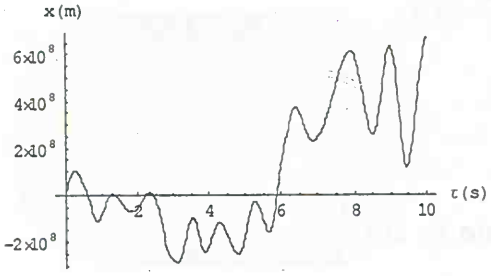


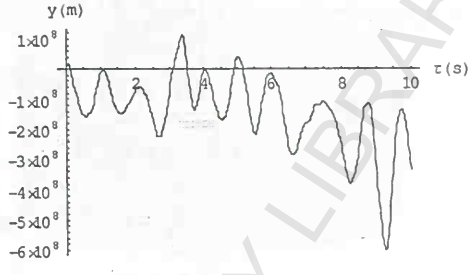
u3 = u3[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 10



u4 = u4[τ] pentru 0 ≤ τ ≤ 10

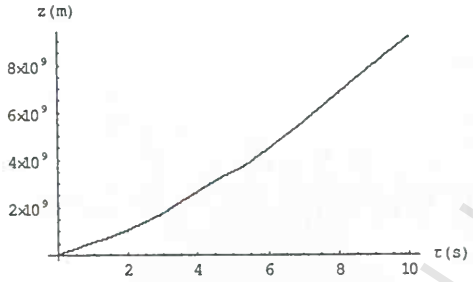
BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY





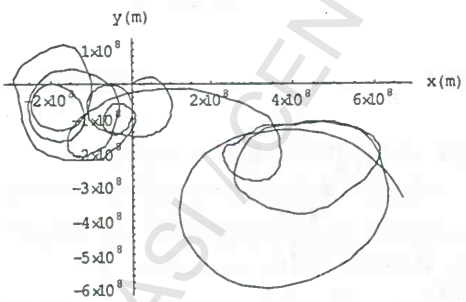
$x = x[\tau]$ pentru $0 \le \tau \le 10$

$y = y[\tau]$ pentru $0 \le \tau \le 10$

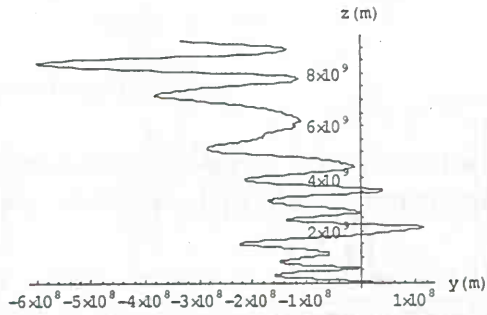


$z = z[\tau]$ pentru $0 \le \tau \le 10$

$t = t[\tau]$ pentru $0 \le \tau \le 10$

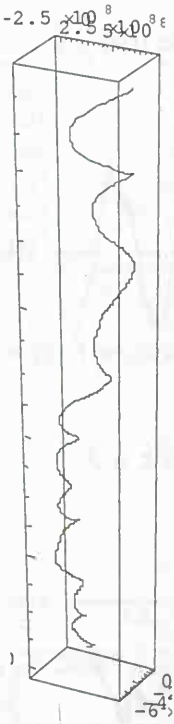


-Graphics-

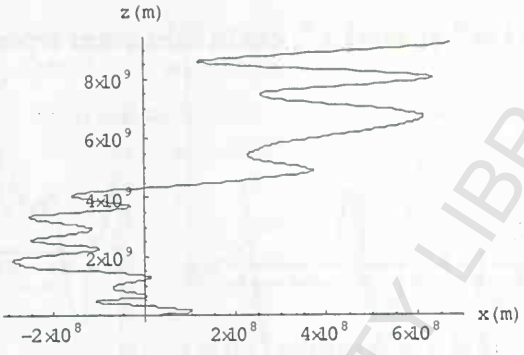


-Graphics-

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



-Graphics3D-



-Graphics-

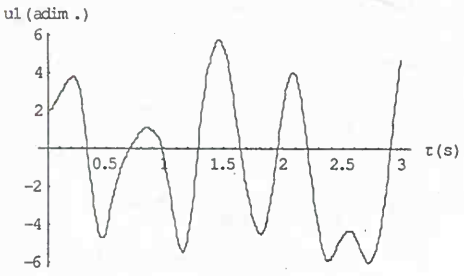
şi

ii) mişcarea unui proton cu acelaşi impuls ca cel considerat la punctul i), pe durata $\Delta\tau = 3\ s$ (măsurată în sistemul de referinţă propriu) în câmpul electromagnetic neuniform şi nestaţionar cu configuraţia

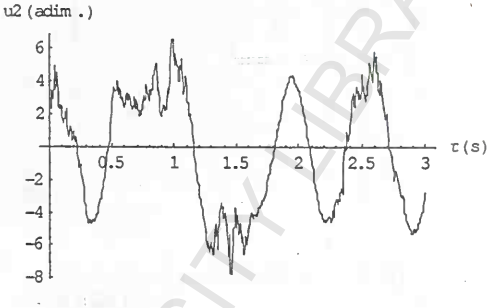
$$\begin{cases} E_x = 5\ \sin\lambda x\ \cos\lambda y, \\ E_y = 2\cdot 10^2 \sin\lambda z\ \cos\omega t, \\ E_z = 0, \\ B_x = 1{,}25\cdot 10^{-7} \sin\dfrac{\lambda y}{2}\ \sin\omega t, \\ B_y = 0, \\ B_z = 1{,}25\cdot 10^{-7} \sin\omega t, \end{cases} \tag{61.19}$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

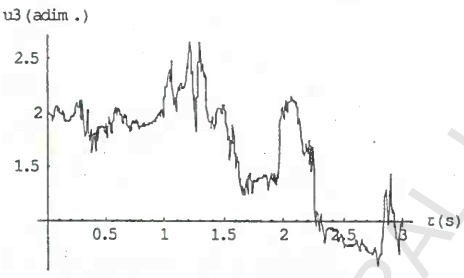
unde $\lambda = 1\, m^{-1}$ şi $\omega = 1\, s^{-1}$, caz în care avem reprezentările de mai jos.



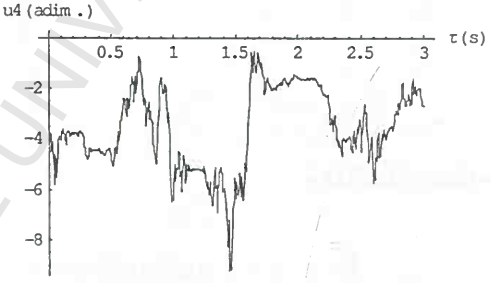
u1 = u1[τ] pentru $0 \le \tau \le 3$



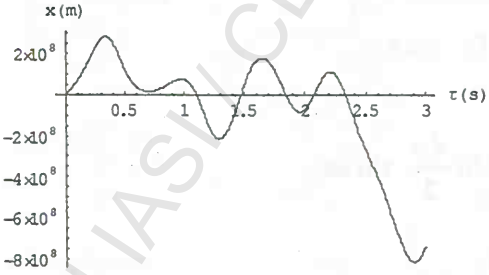
u2 = u2[τ] pentru $0 \le \tau \le 3$



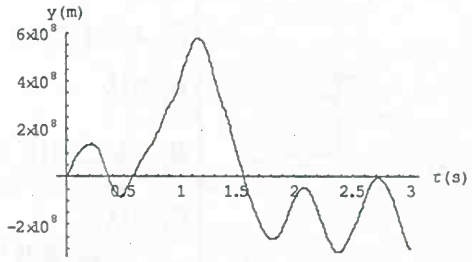
u3 = u3[τ] pentru $0 \le \tau \le 3$



u4 = u4[τ] pentru $0 \le \tau \le 3$

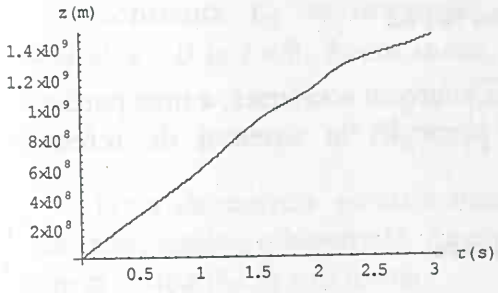


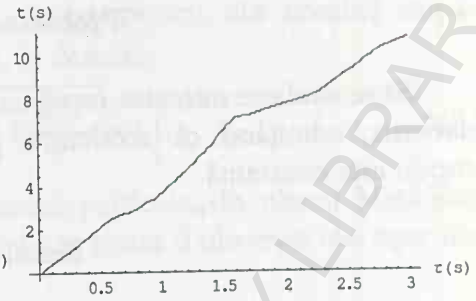
x = x[τ] pentru $0 \le \tau \le 3$



y = y[τ] pentru $0 \le \tau \le 3$

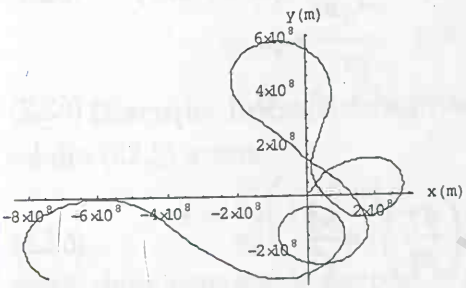
BCU IASI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY



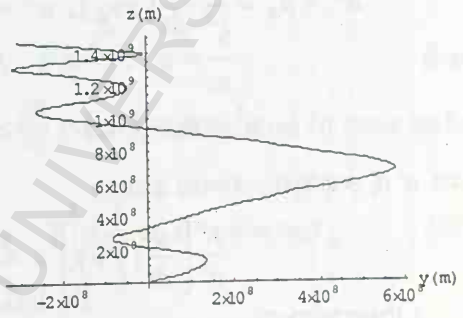


$z = z[\tau]$ pentru $0 \le \tau \le 3$

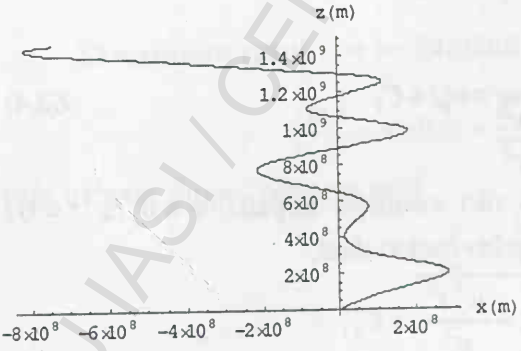
$t = t[\tau]$ pentru $0 \le \tau \le 3$



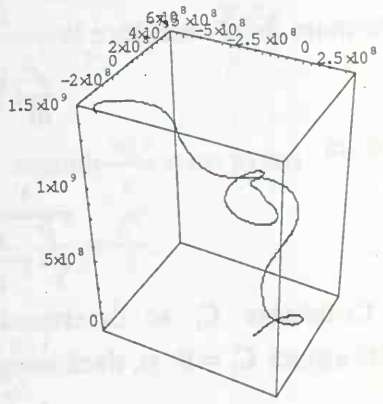
-Graphics-



-Graphics-



-Graphics-



-Graphics3D-

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 62

Să se studieze mişcarea rectilinie, uniform accelerată, a unei particule relativiste, admiţând că acceleraţia particulei în sistemul de referinţă propriu este constantă.

Rezolvare

Întrucât în referenţialul propriu $\vec{v} = 0$, componentele a^i ale cuadrivectorului acceleraţie

$$a^\alpha = a_\alpha = \frac{\gamma}{c^2}\frac{d}{dt}(\gamma v_\alpha);\ a^4 = -a_4 = \frac{\gamma}{c^2}\frac{d\gamma}{dt}\ (\alpha = 1,2,3) \qquad (62.1)$$

vor fi

$$a^1 = a_1 = (a_x) = \frac{w_o}{c^2};\ a^2 = a^3 = a^4 = 0. \qquad (62.2)$$

Cum $a^i a_i = const.$, avem atunci

$$\frac{\gamma^2}{c^4}\left[\frac{d}{dt}(\gamma v)\right]^2 - \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{w_o^2}{c^4}. \qquad (62.3)$$

Observăm că

$$v\frac{d\gamma}{dt} = \frac{v^2}{c^2}\gamma^3\frac{dv}{dt};\ \frac{d}{dt}(\gamma v) = \gamma\frac{dv}{dt}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\gamma^2\right) = \gamma^3\frac{dv}{dt},$$

prin urmare (62.3) conduce la

$$\frac{d}{dt}(\gamma v) = w_o\ ,$$

cu soluţia

$$\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = w_o t + C_1. \qquad (62.4)$$

Constanta C_1 se determină din condiţia iniţială: $v = 0$ la $t = 0$. Rezultă atunci $C_1 = 0$ şi, dacă integrăm încă o dată,

$$x = \frac{c^2}{w_o}\sqrt{1 + \frac{w_o^2 t^2}{c^2}} + C_2.$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Constanta C_2 se determină, de asemenea, din condiții inițiale, alegând $x = 0$ la $t = 0$. Avem atunci, în definitiv

$$x = \frac{c^2}{w_o}\left(\sqrt{1+\frac{w_o^2 t^2}{c^2}} - 1\right). \tag{62.5}$$

Linia de univers asociată mișcării particulei, în planul Minkowski xOt, este, așadar, o hiperbolă. Acest lucru poate fi observat mai ușor dacă punem relația (62.5) sub forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{p^2} - \frac{(t-t_0)^2}{q^2} = 1,$$

unde

$$x_0 \equiv -\frac{c^2}{w_0}, \quad t_0 = 0, \quad p \equiv \frac{c^2}{w_0}, \quad q \equiv \frac{c}{w_0}.$$

Discuție. În cazul nerelativist ($w_o t \ll c$), dezvoltând în serie radicalul din (62.5) avem

$$x = \frac{c^2}{w_o}\left(1+\frac{1}{2}\frac{w_o^2 t^2}{c^2} + \ldots . - 1\right) \simeq \frac{1}{2} w_o t^2 \; ; \; v = w_o t, \tag{62.6}$$

adică, după cum era de așteptat, o parabolă.

Elementele deduse până acum ne permit să calculăm timpul propriu al particulei în mișcare uniform accelerată. Utilizând (62.4), avem

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt = \frac{c}{w_o}\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t^2+\frac{c^2}{w_o^2}}} = \frac{c}{w_o}\operatorname{argsinh}\frac{w_o t}{c}. \tag{62.7}$$

Să analizăm cazul $t \to \infty$. Notând $\operatorname{argsinh}\frac{w_o t}{c} \equiv \alpha$, avem

$$\frac{w_o t}{c} = \sinh\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \cong \frac{e^{\alpha}}{2},$$

prin urmare timpul propriu va fi

$$\tau \cong \frac{c}{w_o}\ln\frac{2 w_o t}{c}. \tag{62.8}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 63

Utilizând formalismul oferit de TRR, să se arate că un electron liber nu poate emite (sau absorbi) un foton.

Rezolvare

Notând cu p_i^e – cuadriimpulsul electronului incident, p_i^{e*} – cuadriimpulsul electronului emergent şi cu p_i^{f*} – cuadriimpulsul fotonului emergent, avem

$$p_i^e = p_i^{e*} + p_i^{f*}. \tag{63.1}$$

Ridicând această relaţie la pătrat, obţinem

$$(p_e)_i (p_e)^i = (p_e^*)_i (p_e^*)^i + (p_f^*)_i (p_f^*)^i + 2(p_e^*)_i (p_f^*)^i.$$

Dar

$$(p_e)_i (p_e)^i = (p_e^*)_i (p_e^*)^i = -m_0^2 c^2;\ (p_f^*)_i (p_f^*)^i = 0,$$

unde m_0 este masa de repaus a electronului; deci,

$$(p_e^*)_i (p_f^*)^i = 0. \tag{63.2}$$

Pe de altă parte,

$$|\vec{p}_e^*| = p_e^*;\ |\vec{p}_f^*| = \frac{1}{c}E_f^*;\ (p_e^*)^4 = \frac{1}{c}E_e^*;\ (p_f^*)^4 = \frac{1}{c}E_f^*;$$

$$\frac{1}{c}E_e^* = \sqrt{|\vec{p}_e^*|^2 + m_0^2 c^2}\ \text{(relaţia lui Einstein)},$$

şi atunci (63.2) conduce la

$$E_f^* \left(p_e^* \cos\theta - \sqrt{(p_e^*)^2 + m_0^2 c^2} \right) = 0,$$

unde θ este unghiul dintre electronul emergent şi fotonul emergent. Cum $E_f^* \neq 0$, avem în fine

$$\cos\theta = \sqrt{1 + \frac{m_0^2 c^2}{(p_e^*)^2}} \geq 1. \tag{63.3}$$

Rezultatul absurd la care am ajuns arată că relaţia (63.1) este greşită şi, prin urmare, cerinţa problemei este justificată.

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

XI. TEORIA RELATIVITĂȚII GENERALE

Problema nr. 64

Să se determine elementul de distanță spațială într-un sistem de coordonate aflat în rotație uniformă.

Complemente. *Intervale spațiale și temporale în TRG*

Fie două evenimente apropiate temporal, care au loc în același punct din spațiu. Alegând pe x^1, x^2 și x^3 drept coordonate spațiale și pe $x^4 = ct$ coordonata temporală, din enunț rezultă că $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, și prin urmare, metrica va fi

$$-ds^2 = -c^2 d\tau^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k = g_{44}\left(dx^4\right)^2,$$

de unde, timpul propriu („adevărat") corespunzător celor două evenimente ce se produc în același punct este

$$\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{44}}\, dx^4. \tag{64.1}$$

După cum se știe, în TRR lungimea proprie elementară, dl, se poate determina ca intervalul dintre două evenimente infinit vecine, care au loc în același moment, alegând $dx^4 = 0$. În TRG acest lucru nu este posibil, deoarece în puncte diferite timpul propriu, τ, este legat în mod diferit de coordonata x^4.

Să admitem că în punctul $B\left(x^\alpha + dx^\alpha\right)$, $\alpha = \overline{1,3}$, este emis un semnal luminos care este recepționat în punctul infinit vecin $A\left(x^\alpha\right)$ și care revine pe același drum. Cum metrica este luminoasă (izotropă), avem

$$-ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + 2g_{\alpha 4}\, dx^\alpha\, dx^4 + g_{44}\left(dx^4\right)^2 = 0.$$

Rădăcinile acestei ecuații de gradul doi în dx^4 sunt

$$\left(dx^4\right)_1 = -\frac{1}{g_{44}}\left[\, g_{\alpha 4}\, dx^\alpha + \sqrt{\left(g_{\alpha 4}g_{\beta 4} - g_{\alpha\beta}g_{44}\right)dx^\alpha dx^\beta}\,\right]$$

și

$$\left(dx^4\right)_2 = -\frac{1}{g_{44}}\left[\, g_{\alpha 4}\, dx^\alpha - \sqrt{\left(g_{\alpha 4}g_{\beta 4} - g_{\alpha\beta}g_{44}\right)dx^\alpha dx^\beta}\,\right],$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi corespund propagării semnalelor în cele două sensuri, între punctele A şi B, de coordonate date. În figura 64 liniile pline sunt liniile de univers ale punctelor A şi B, în timp ce liniile punctate reprezintă liniile de univers ale semnalelor luminoase.

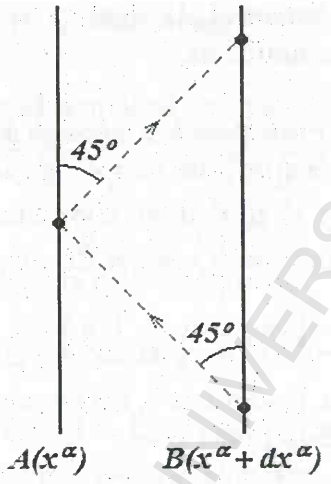


Fig. 64.

Diferența de „timp" între momentul plecării şi cel al revenirii semnalului în acelaşi punct este

$$(dx^4)_1 - (dx^4)_2 = -\frac{2}{g_{44}}\sqrt{(g_{\alpha 4}g_{\beta 4} - g_{\alpha\beta}g_{44})dx^\alpha dx^\beta}\,.$$

Timpul propriu („adevărat") elementar va fi atunci

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-g_{44}}\left[(dx^4)_2 - (dx^4)_1\right] = \frac{2}{c\sqrt{-g_{44}}}\sqrt{(g_{\alpha 4}g_{\beta 4} - g_{\alpha\beta}g_{44})dx^\alpha dx^\beta}\,.$$

Distanța proprie elementară, $dl = \frac{1}{2}c\,d\tau$, este în acest caz determinată de

$$(dl)^2 = -(g_{44})^{-1}(g_{\alpha 4}g_{\beta 4} - g_{\alpha\beta}g_{44})dx^\alpha dx^\beta = \gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta\,,$$

unde

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{\alpha 4}\,g_{\beta 4}}{g_{44}} \qquad (64.2)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

este *tensorul metric tridimensional.*

Rezolvare

Ca o aplicație a elementelor pregătitoare de mai sus, să realizăm trecerea de la un referențial fix (inerțial) S' la un altul, S, aflat în rotație uniformă cu viteza unghiulară ω în jurul direcției $Oz' \equiv Oz$. Întrucât problema presupune simetrie cilindrică, să notăm cu r', φ', z' și (t) coordonatele unui punct oarecare în referențialul fix și cu r, φ, z și (t) coordonatele aceluiași punct în referențialul mobil. În S' metrica este

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dr'^2 - r'^2\,d\varphi'^2 - dz'^2 .$$

Dar $r' = r$, $z' = z$, $\varphi' = \varphi + \omega t$, și atunci

$$ds^2 = -g_{ik}\,dx^i\,dx^k = \left(c^2 - \omega^2 t^2\right)dt^2 - 2\omega r^2\,d\varphi\,dt - dz^2 - r^2\,d\varphi^2 - dr^2 ,$$

deci

$$g_{11} = 1\,;\ g_{22} = r^2\,;\ g_{33} = 1;\ g_{24} = \frac{\omega r^2}{c};\ g_{44} = -\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right).$$

În referențialul aflat în rotație, elementul de distanță spațială se determină utilizând relația (64.2). Alegând $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$ și $x^4 = ct$, din (64.2) deducem

$$\gamma_{11} = g_{11} = 1;\ \gamma_{33} = g_{33} = 1\,;\ \gamma_{22} = g_{22} - \frac{(g_{24})^2}{g_{44}} = r^2\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^{-1},$$

prin urmare, soluția problemei se exprimă prin relația

$$(dl)^2 = \gamma_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = dr^2 + dz^2 + \frac{r^2\,d\varphi^2}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}. \qquad (64.3)$$

Observație: În sistemul fix (inerțial), raportul dintre lungimea L a unui cerc și raza R a acestuia, în planul $z = const.$ (cercul având centrul pe axa de rotație) este 2π, în timp ce în referențialul neinerțial (în rotație) avem

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{R\,d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}}} = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2}}};\ \frac{L}{R} > 2\pi\ (!). \qquad (64.4)$$

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 65

În punctul determinat de $\theta = \theta_o$, $\varphi = 0$ pe suprafaţa sferei bidimensionale $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$, vectorul $\vec{A}$ coincide cu versorul $\vec{u}_\theta$. Să se scrie expresia lui $\vec{A}$ după transportul paralel de-a lungul cercului $\theta = \theta_o$, precum şi mărimea sa după transport.

Complemente. Prin definiţie, tensorul Q (de orice ordin şi/sau varianţă) suferă o *deplasare paralelă* dacă diferenţiala sa absolută este nulă:

$$DQ = dQ + \delta Q = 0.$$

Dacă, de pildă, Q este un vector contravariant, A^i, avem

$$DA^i = dA^i + \Gamma^i_{kl}\, A^k\, dx^l = 0,$$

sau

$$u^l\left(\frac{\partial A^i}{dx^l} + \Gamma^i_{kl}\, A^k\right) = 0;\ u^l = \frac{dx^l}{ds}, \tag{65.1}$$

unde Γ^i_{kl} sunt coeficienţii de conexiune ai spaţiului.

Dacă vectorul tangent la o curbă se transportă prin paralelism, atunci curba se numeşte *autoparalelă*. Pentru $A^i \equiv u^i$, avem

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}\, u^k\, u^l = 0. \tag{65.2}$$

În cazul în care coeficienţii de conexiune coincid cu simbolurile lui Christoffel de spaciа a doua, spaţiul este riemannian. Prin urmare, *liniile autoparalele ale unui spaţiu riemannian sunt geodezicele spaţiului.*

Rezolvare

Utilizând relaţia (65.1), avem

$$\nabla_\varphi A^\alpha = A^\alpha_{,\varphi} + \Gamma^\alpha_{\beta\varphi}\, A^\beta = 0;\ (\alpha, \beta = 1,2). \tag{65.3}$$

Pe de altă parte, utilizând metrica dată în enunţ, să formăm expresia $\Phi = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta$. Atunci, ecuaţiile Euler-Lagrange

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = 0$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

dau

$$\begin{cases} \Gamma^1_{22} = \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta; \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = ctg\,\theta. \end{cases}$$

Din ecuațiile (9.3) rezultă atunci

$$\begin{cases} A^\theta_{,\varphi} - \sin\theta\cos\theta\, A^\varphi = 0; \\ A^\varphi_{,\varphi} + ctg\theta\, A^\theta = 0, \end{cases} \tag{65.4}$$

unde am ținut seama că $\theta = const.$ Derivând (65.4 - 1) în raport cu φ și folosind (65.4 - 2), obținem ecuația

$$A^\theta_{,\varphi\varphi} + \cos^2\theta\, A^\theta = 0,$$

cu soluția

$$A^\theta = C_1\cos(\varphi\cos\theta) + C_2\sin(\varphi\cos\theta). \tag{65.5}$$

Derivând acum (65.5) în raport cu φ și apelând din nou la (65.4 - 1), găsim

$$A^\varphi = \frac{1}{\sin\theta}\,[-C_1\sin(\varphi\cos\theta) + C_2\cos(\varphi\cos\theta)]. \tag{65.6}$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile „inițiale": lui $\varphi = 0$ îi corespunde $\vec{A}_{\varphi=0} = \vec{u}_\theta$, deci $C_1 = 1$ și $C_2 = 0$, ceea ce conduce la

$$A^\theta = \cos(\varphi\cos\theta);\ A^\varphi = -\frac{1}{\sin\theta}\sin(\varphi\cos\theta),$$

prin urmare, înainte de transport, vectorul $\vec{A}$ are expresia

$$\vec{A} = \cos(\varphi\cos\theta)\,\vec{u}_\theta - \frac{1}{\sin\theta}\sin(\varphi\cos\theta)\,\vec{u}_\varphi, \tag{65.7}$$

iar după transport $(\varphi = 2\pi)$

$$\vec{A}_{\varphi=2\pi} = \cos(2\pi\cos\theta)\,\vec{u}_\theta - \frac{1}{\sin\theta}\sin(2\pi\cos\theta)\,\vec{u}_\varphi \neq \vec{u}_\theta. \tag{65.8}$$

În schimb, având în vedere că $g_{11} = 1$ și $g_{22} = \sin^2\theta$ avem:

$$(A_i\,A^i)_{\varphi=2\pi} = g_{ik}\,A^i A^k = g_{11}A^1A^1 + g_{22}A^2A^2 = 1 = (A_i\,A^i)_{\varphi=0}, \tag{65.9}$$

după cum era de așteptat.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Problema nr. 66

Să se găsească geodezicele corespunzătoare varietăţii cu metrica $ds^2 = \frac{1}{t^2}(dt^2 - dx^2)$.

Rezolvare

Putem scrie, pe de o parte,

$$ds^2 = \frac{1}{t^2}(\dot{t}^2 - \dot{x}^2)ds^2 = \Phi ds^2, \tag{66.1}$$

unde punctul are semnificaţia derivatei în raport cu s, iar pe de alta parte avem

$$ds = \frac{1}{t}\left[1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right]^{1/2} dt. \tag{66.2}$$

Introducând funcţia Φ în ecuaţiile Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

şi observând că x este o variabilă ciclică, avem

$$\frac{\dot{x}}{t^2} = A \ (= const.) \tag{66.3}$$

Dar

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{t}{\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}\frac{dx}{dt},$$

care, cu ajutorul lui (66.3), conduce la

$$\frac{dx}{dt} = At\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2},$$

sau, dacă separăm variabilele şi integrăm,

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$x = \frac{1}{A}\sqrt{1 + A^2 t^2}\,.$$

Introducând constanta $a = A^{-1}$, obținem în fine

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{t^2}{a^2} = 1. \tag{66.4}$$

Geodezicele corespunzătoare varietății cu metrica (66.1) sunt, așadar, *hiperbole echilatere tangente la conul luminos.*

Problema nr. 67

Să se arate că derivata covariantă a tensorului metric fundamental, g^{ik}, este nulă.

Rezolvare

În cele ce urmează vom alege tensorul metric contravariant, g^{ik}. Demonstrația pentru componentele covariante este absolut asemănătoare. Din definiția derivatei covariante, avem

$$g^{ik}{}_{;m} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m} + \Gamma^k_{jm}\, g^{ij} + \Gamma^i_{jm}\, g^{jk}, \tag{67.1}$$

sau, dacă exprimăm simbolurile lui Christoffel de specia a doua prin cele de specia întîi, iar pe acestea din urmă le explicităm

$$g^{ik}{}_{;m} = \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^m} + \left(g^{ks}\Gamma_{jm,s}\right) g^{ij} + \left(g^{is}\Gamma_{jm,s}\right) g^{jk} = g^{ik}_{,m} + \frac{1}{2} g^{ij} g^{ks} \left(g_{sj,m} + g_{sm,j} - g_{jm,s}\right) + \frac{1}{2} g^{is} g^{ik} \left(g_{sj,m} + g_{sm,j} - g_{jm,s}\right).$$

În continuare, vom utiliza relația evidentă

$$g^{ik} g_{im} = \delta^k_m, \tag{67.2}$$

care, derivată în raport cu x^s conduce la

$$g^{ik} g_{im,s} = -g_{im}\, g^{ik}_{,s}. \tag{67.3}$$

Avem atunci

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$g^{ik}{}_{;m} = g^{ik}{}_{,m} + \frac{1}{2} g^{ks} g_{jm} g^{ij}{}_{,s} + \frac{1}{2} g^{is} g_{jm} g^{jk}{}_{,s} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{sj} g^{ks}{}_{,m} - \frac{1}{2} g^{is} g_{sj} g^{jk}{}_{,m} - \frac{1}{2} g^{ij} g_{sm} g^{ks}{}_{,j} - \frac{1}{2} g^{jk} g_{sm} g^{is}{}_{,j} . \quad (67.4)$$

Schimbând în mod convenabil indicii de însumare în (67.4) şi apelând la (67.2), se observă că

$$g^{jk}{}_{;m} = 0 . \quad (67.5)$$

Problema nr. 68

Să se arate că divergenţa cuadridimensională covariantă a tensorului lui Einstein, $G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik}$, este nulă.

Rezolvare

Utilizând identitatea lui Bianchi

$$R^{j}_{\cdot ikl;s} + R^{j}_{\cdot isk;l} + R^{j}_{\cdot ils;k} = 0 , \quad (68.1)$$

şi amintindu-ne de proprietăţile tensorului lui Riemann, să schimbăm între ei indicii k şi l în primul termen, apoi să înmulţim relaţia cu g^{ik}. Obţinem

$$-g^{ik} R^{j}_{\cdot ilk;s} + g^{ik} R^{j}_{\cdot isk;l} + g^{ik} R^{j}_{\cdot ils;k} = 0 .$$

Înmulţind acum cu δ^{l}_{j} şi având în vedere că derivata covariantă a tensorului metric (de orice variantă) este nulă, mai putem scrie

$$-(g^{ik} R_{ik})_{;s} + (g^{ik} R_{is})_{;k} + (g^{ik} R^{l}_{\cdot isk})_{;l} = 0 .$$

Ultimul termen este tensorul lui Ricci mixt. Într-adevăr,

$$(g^{ik} R^{l}_{\cdot isk})_{;l} = g^{ik} g^{lm} R_{misk} = g^{ik} g^{lm} R_{imks} = g^{lm} R^{k}_{\cdot mks} = g^{lm} R_{ms} = R^{l}_{s} .$$

Rezultă atunci

$$-R_{;s} + R^{k}_{s;k} + R^{l}_{s;l} = 0 ,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

sau

$$\left(R_s^k - \frac{1}{2} R\, \delta_s^k \right)_{;k} = G_{s;k}^k = 0 . \tag{68.2}$$

Observație: Din ecuațiile lui Einstein: $R_s^k - \frac{1}{2} R\, \delta_s^k = \kappa T_s^k$, avem

$$T_{s;k}^k = 0 , \tag{68.3}$$

relație ce exprimă legile de conservare ale energiei, impulsului și momentului cinetic ale câmpului gravitațional.

Problema nr. 69

Să se arate că, în vid, un câmp gravitațional slab se propagă sub formă de unde.

Rezolvare

Întrucât, prin definiție, câmpul gravitațional este slab, vom alege tensorul metric sub forma

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik} , \tag{69.1}$$

unde h_{ik} este un tensor infinitezimal, iar $g_{ik}^{(0)}$ sunt componentele tensorului metric al spațiului Minkowski (plat)

$$g_{\alpha\beta}^{(0)} = \delta_{\alpha\beta} ; \; g_{\alpha 4}^{(0)} = 0 ; \; g_{44}^{(0)} = -1 . \tag{69.2}$$

În continuare, vom utiliza expresia ce definește tensorul de curbura complet covariant

$$R_{iklm} = g_{is} R^s{}_{klm} = g_{is} \left(\frac{\partial \Gamma_{km}^s}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^s}{\partial x^m} + \Gamma_{km}^j \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{kl}^j \Gamma_{jm}^s \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\Gamma_{km,i} \right) - \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\Gamma_{kl,i} \right) - \Gamma_{km}^s \left(\Gamma_{sl}^j g_{ij} + \Gamma_{il}^j g_{sj} \right) +$$

$$\Gamma_{kl}^s \left(\Gamma_{ms}^j g_{ij} + \Gamma_{mi}^j g_{is} \right) + g_{is} \Gamma_{km}^j \Gamma_{jl}^s - g_{is} \Gamma_{kl}^j \Gamma_{jm}^s .$$

După reducerea unor termeni și schimbarea – între ei – a indicilor de sumare j și s, găsim, în definitiv,

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k\partial x^m}-\frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i\partial x^l}\right)+g_{js}\left(\Gamma^j_{mi}\Gamma^s_{kl}-\Gamma^j_{il}\Gamma^s_{km}\right). \tag{69.3}$$

Înlocuind aici (69.1) şi având în vedere (69.2), după neglijarea termenilor de ordinul doi în h_{ik} obţinem

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k\partial x^l}+\frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i\partial x^m}-\frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k\partial x^m}-\frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i\partial x^l}\right). \tag{69.4}$$

Să calculăm, în continuare, componentele tensorului Riemann-Ricci. Observând că tensorul de curbură este antisimetric în primii doi şi în ultimii doi indici, avem

$$R_{ik}=g^{lm}R_{limk}\simeq g^{(0)lm}R_{limk}=$$
$$\frac{1}{2}g^{(0)lm}\left(\frac{\partial^2 h_{lk}}{\partial x^i\partial x^m}+\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k\partial x^l}-\frac{\partial^2 h_{lm}}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l\partial x^m}\right)=$$
$$\frac{1}{2}\left(-g^{(0)lm}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l\partial x^m}+\frac{\partial^2 h_i{}^l}{\partial x^l\partial x^m}+\frac{\partial^2 h_k{}^l}{\partial x^i\partial x^l}-\frac{\partial^2 h}{\partial x^i\partial x^k}\right), \tag{69.5}$$

unde $h=g^{(0)lm}h_{lm}$.

Să formăm tensorul infinitezimal, asemănător tensorului lui Einstein,

$$\Psi^l_i\equiv h^l_i-\frac{1}{2}h\,\delta^l_i \tag{69.6}$$

şi să impunem condiţia de tip Lorentz

$$\frac{\partial\Psi^l_i}{\partial x^l}=0. \tag{69.7}$$

Avem atunci

$$\frac{\partial h^l_i}{\partial x^l}=\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^i};\quad \frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^l\partial x^k}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^i\partial x^k};\quad 2\frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^l\partial x^k}=\frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^l\partial x^k}+\frac{\partial^2 h^l_k}{\partial x^l\partial x^i},$$

prin urmare, ultimii trei termeni din (69.5) se reduc şi rămâne

$$R_{ik}=-\frac{1}{2}\Box h_{ik};\quad \left(\Box=g^{(0)lm}\frac{\partial^2}{\partial x^l\partial x^m}\right). \tag{69.7}$$

Dar, în vid $T_{ik}=0$, deci

$$R_{ik}=\kappa\left(T_{ik}-\frac{1}{2}T\,g_{ik}\right)=0,$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi atunci

$$\Box h_k^i = 0. \tag{69.8}$$

În concluzie, *câmpul gravitațional se propagă în vid sub formă de unde.* Aceste unde, ca şi cele asociate câmpului electromagnetic, se propagă (în vid) cu viteza luminii.

Problema nr. 70

Să se analizeze geometria spațio-temporală a metricii

$$ds^2 = [a(z,\ t)]^2 \left[e^{2b(z,\ t)} dx^2 + e^{-2b(z,\ t)} dy^2 \right] + e^{2c(z,\ t)} dz^2 - e^{2c(z,\ t)} dt^2, \tag{70.1}$$

considerând coordonatele $\{x^i\} = \{x,\ y,\ z,\ ct\} \equiv \{x,\ y,\ z,\ t\}$ ($c = 1$ este viteza luminii în vid – se consideră deci, sistemul natural de unități). Mărimile $a(z,\ t)$, $b(z,\ t)$ şi $c(z,\ t)$ sunt funcții reale de variabilele z şi t.

Rezolvare

Vom analiza geometria spațio-temporală a metricii (70.1), utilizând soft-ul specializat în calcule analitice MAPLE 9.0. Mai exact, apelând la pachetele de programe de calcul analitic specifice acestui soft, vom determina principalele caracteristici ale geometriei spațio-temporale definite prin metrica (70.1) şi anume:

1. simbolurile Christoffel (de speța I şi a II-a),
2. componentele tensorului Riemann,
3. componentele tensorului Ricci,
4. invariantul scalar de curbură,
5. componentele tensorului Einstein şi
6. componentele tensorului Weyl.

Liniile de comandă precum şi rezultatele obținute cu ajutorul soft-ului sus-amintit sunt prezentate în cele ce urmează.

Metrica (70. 1) este „definită" prin următoarele instrucțiuni:

****

BCU IASI CENTRALA UNIVERSITY LIBRARY

```
with( tensor ):
coord := [x, y, z, t]:
g_compts := array(symmetric,sparse, 1..4, 1..4):
g_compts[1, 1] : = a(z, t)^2*exp(2*b(z, t)) : g_compts[2, 2]:= a(z,
t)^2*exp(-2*b(z, t)):
g_compts[3, 3] :=exp(2*c(z, t)): g_compts[4, 4] := -exp(2*c(z,t)):
g := create( [-1, -1], eval(g_compts));
```

****

În forma matriceală, liniile de comandă anterioare dau următorul rezultat:

$$g := table([compts = \begin{bmatrix} a(z,t)^2 e^{2b(z,t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(z,t)^2 e^{-2b(z,t)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2c(z,t)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2c(z,t)} \end{bmatrix},$$
$$index_char = [-1,-1]])$$

1. În continuare vom determina simbolurile Christoffel, Γ^i_{jk}. Pentru aceasta, mai întâi vom calcula componentele Γ_{ijk}, $\left(i, j, k = \overline{1,4}\right)$ ale simbolurilor Christoffel de speța I, care (în liniile de comandă) sunt denumite **Christoffel1** și sunt desemnate (ca rezultat al calculelor) prin sintaxa: $\Gamma_{ijk} \equiv (i, j, k)$.

****

```
ginv:= invert (g, 'detg'):
D1g:=d1metric(g, coord):Cf1:=Christoffel1 (D1g);
```

****

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$Cf1$:= table([$compts$ = array($cf1$, 1 .. 4, 1 .. 4, 1 .. 4, [

$(1, 1, 1) = 0$

$(1, 1, 2) = 0$

$$(1, 1, 3) = -a(z, t)\, e^{(2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z} a(z, t)\right) - a(z, t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z, t)\right) e^{(2b(z,t))}$$

$$(1, 1, 4) = -a(z, t)\, e^{(2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t} a(z, t)\right) - a(z, t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t} b(z, t)\right) e^{(2b(z,t))}$$

$(1, 2, 1) = 0$

$(1, 2, 2) = 0$

$(1, 2, 3) = 0$

$(1, 2, 4) = 0$

$$(1, 3, 1) = a(z, t)\, e^{(2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z} a(z, t)\right) + a(z, t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z, t)\right) e^{(2b(z,t))}$$

$(1, 3, 2) = 0$

$(1, 3, 3) = 0$

$(1, 3, 4) = 0$

$$(1, 4, 1) = a(z, t)\, e^{(2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t} a(z, t)\right) + a(z, t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t} b(z, t)\right) e^{(2b(z,t))}$$

$(1, 4, 2) = 0$

$(1, 4, 3) = 0$

$(1, 4, 4) = 0$

$(2, 1, 1) = 0$

$(2, 1, 2) = 0$

$(2, 1, 3) = 0$

$(2, 1, 4) = 0$

$(2, 2, 1) = 0$

$(2, 2, 2) = 0$

$$(2, 2, 3) = -a(z, t)\, e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z} a(z, t)\right) + a(z, t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z, t)\right) e^{(-2b(z,t))}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$(2,2,4) = -a(z,t)\, e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right) + a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)e^{(-2b(z,t))}$$

$$(2,3,1) = 0$$

$$(2,3,2) = a(z,t)\, e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right) - a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)e^{(-2b(z,t))}$$

$$(2,3,3) = 0$$

$$(2,3,4) = 0$$

$$(2,4,1) = 0$$

$$(2,4,2) = a(z,t)\, e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right) - a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)e^{(-2b(z,t))}$$

$$(2,4,3) = 0$$

$$(2,4,4) = 0$$

$$(3,1,1) = a(z,t)\, e^{(2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right) + a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)e^{(2b(z,t))}$$

$$(3,1,2) = 0$$

$$(3,1,3) = 0$$

$$(3,1,4) = 0$$

$$(3,2,1) = 0$$

$$(3,2,2) = a(z,t)\, e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right) - a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)e^{(-2b(z,t))}$$

$$(3,2,3) = 0$$

$$(3,2,4) = 0$$

$$(3,3,1) = 0$$

$$(3,3,2) = 0$$

$$(3,3,3) = \left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)e^{(2c(z,t))}$$

$$(3,3,4) = -\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)e^{(2c(z,t))}$$

$$(3,4,1) = 0$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$(3, 4, 2) = 0$

$(3, 4, 3) = \left(\frac{\partial}{\partial t} c(z, t)\right) e^{(2 c(z, t))}$

$(3, 4, 4) = -\left(\frac{\partial}{\partial z} c(z, t)\right) e^{(2 c(z, t))}$

$(4, 1, 1) = a(z, t)\, e^{(2 b(z, t))} \left(\frac{\partial}{\partial t} a(z, t)\right) + a(z, t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} b(z, t)\right) e^{(2 b(z, t))}$

$(4, 1, 2) = 0$

$(4, 1, 3) = 0$

$(4, 1, 4) = 0$

$(4, 2, 1) = 0$

$(4, 2, 2) = a(z, t)\, e^{(-2 b(z, t))} \left(\frac{\partial}{\partial t} a(z, t)\right) - a(z, t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} b(z, t)\right) e^{(-2 b(z, t))}$

$(4, 2, 3) = 0$

$(4, 2, 4) = 0$

$(4, 3, 1) = 0$

$(4, 3, 2) = 0$

$(4, 3, 3) = \left(\frac{\partial}{\partial t} c(z, t)\right) e^{(2 c(z, t))}$

$(4, 3, 4) = -\left(\frac{\partial}{\partial z} c(z, t)\right) e^{(2 c(z, t))}$

$(4, 4, 1) = 0$

$(4, 4, 2) = 0$

$(4, 4, 3) = \left(\frac{\partial}{\partial z} c(z, t)\right) e^{(2 c(z, t))}$

$(4, 4, 4) = -\left(\frac{\partial}{\partial t} c(z, t)\right) e^{(2 c(z, t))}$

]),

index_char = [-1, -1, -1]

])

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Cunoscând simbolurile Christoffel de speţa I, Γ_{ijk}, cu ajutorul relaţiei de definiţie: $\Gamma^{i}_{jk} = g^{im}\Gamma_{mjk}$, pot fi determinate simbolurile Christoffel de speţa a II-a, Γ^{i}_{jk}. În următoarea linie de comandă acestea sunt desemnate prin **Cf2**. De asemenea, componentele contravariante ale tensorului metric, g^{im}, sunt desemnate prin **ginv**. Rezultatul [prezentat sub aceeaşi formă ca şi cel corespunzător simbolurilor Christoffel de speţa I, adică sub forma (i,j,k)] reprezintă aici chiar componentele lui $\Gamma^{i}_{jk} \equiv (i,j,k)$.

****

`tensor/Christoffel2/simp`:= proc(x) simplify(x, trig) end proc:
Cf2:= Christoffel2 (ginv, Cf1);

****

Cf2 := table([*compts* = array(*cf2*, 1 .. 4, 1 .. 4, 1 .. 4, [

(1, 1, 1) = 0

(1, 1, 2) = 0

$$(1,1,3) = \frac{a(z,t)\,e^{(2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right) + a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)e^{(2\,b(z,t))}}{a(z,t)^2\,e^{(2\,b(z,t))}}$$

$$(1,1,4) = \frac{a(z,t)\,e^{(2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right) + a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)e^{(2\,b(z,t))}}{a(z,t)^2\,e^{(2\,b(z,t))}}$$

(1, 2, 1) = 0

(1, 2, 2) = 0

(1, 2, 3) = 0

(1, 2, 4) = 0

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$(1,3,1)=\frac{a(z,t)\,e^{(2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)+a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)e^{(2b(z,t))}}{a(z,t)^2\,e^{(2b(z,t))}}$$

$$(1,3,2)=0$$

$$(1,3,3)=0$$

$$(1,3,4)=0$$

$$(1,4,1)=\frac{a(z,t)\,e^{(2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)+a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)e^{(2b(z,t))}}{a(z,t)^2\,e^{(2b(z,t))}}$$

$$(1,4,2)=0$$

$$(1,4,3)=0$$

$$(1,4,4)=0$$

$$(2,1,1)=0$$

$$(2,1,2)=0$$

$$(2,1,3)=0$$

$$(2,1,4)=0$$

$$(2,2,1)=0$$

$$(2,2,2)=0$$

$$(2,2,3)=\frac{a(z,t)\,e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)-a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)e^{(-2b(z,t))}}{a(z,t)^2\,e^{(-2b(z,t))}}$$

$$(2,2,4)=\frac{a(z,t)\,e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)-a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)e^{(-2b(z,t))}}{a(z,t)^2\,e^{(-2b(z,t))}}$$

$$(2,3,1)=0$$

$$(2,3,2)=\frac{a(z,t)\,e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)-a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)e^{(-2b(z,t))}}{a(z,t)^2\,e^{(-2b(z,t))}}$$

$$(2,3,3)=0$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$(2,3,4)=0$$
$$(2,4,1)=0$$

$$(2,4,2)=\frac{a(z,t)\,e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)-a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)e^{(-2b(z,t))}}{a(z,t)^2\,e^{(-2b(z,t))}}$$

$$(2,4,3)=0$$

$$(2,4,4)=0$$

$$(3,1,1)=\frac{-a(z,t)\,e^{(2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)-a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)e^{(2b(z,t))}}{e^{(2c(z,t))}}$$

$$(3,1,2)=0$$
$$(3,1,3)=0$$
$$(3,1,4)=0$$
$$(3,2,1)=0$$

$$(3,2,2)=\frac{-a(z,t)\,e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)+a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)e^{(-2b(z,t))}}{e^{(2c(z,t))}}$$

$$(3,2,3)=0$$

$$(3,2,4)=0$$
$$(3,3,1)=0$$
$$(3,3,2)=0$$
$$(3,3,3)=\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)$$

$$(3,3,4)=\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)$$
$$(3,4,1)=0$$
$$(3,4,2)=0$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$(3, 4, 3) = \frac{\partial}{\partial t} c(z, t)$$

$$(3, 4, 4) = \frac{\partial}{\partial z} c(z, t)$$

$$(4, 1, 1) = -\frac{-a(z, t)\, e^{(2\, b(z, t))} \left(\frac{\partial}{\partial t} a(z, t)\right) - a(z, t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} b(z, t)\right) e^{(2\, b(z, t))}}{e^{(2\, c(z, t))}}$$

$$(4, 1, 2) = 0$$

$$(4, 1, 3) = 0$$

$$(4, 1, 4) = 0$$

$$(4, 2, 1) = 0$$

$$(4, 2, 2) = -\frac{-a(z, t)\, e^{(-2\, b(z, t))} \left(\frac{\partial}{\partial t} a(z, t)\right) + a(z, t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} b(z, t)\right) e^{(-2\, b(z, t))}}{e^{(2\, c(z, t))}}$$

$$(4, 2, 3) = 0$$

$$(4, 2, 4) = 0$$

$$(4, 3, 1) = 0$$

$$(4, 3, 2) = 0$$

$$(4, 3, 3) = \frac{\partial}{\partial t} c(z, t)$$

$$(4, 3, 4) = \frac{\partial}{\partial z} c(z, t)$$

$$(4, 4, 1) = 0$$

$$(4, 4, 2) = 0$$

$$(4, 4, 3) = \frac{\partial}{\partial z} c(z, t)$$

$$(4, 4, 4) = \frac{\partial}{\partial t} c(z, t)$$

]),

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

index_char = [1, -1, -1]
])

2. Componentele tensorului Riemann, $R_{ijkl} = g_{im} R^{m}_{.jkl} = g_{im}\left(\frac{\partial \Gamma^{m}_{jl}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial \Gamma^{m}_{jk}}{\partial x^{l}} + \Gamma^{s}_{jl}\Gamma^{m}_{ks} - \Gamma^{s}_{jk}\Gamma^{m}_{sl}\right)$.

****

ginv := invert(g, 'detg'):
D1g := d1metric (g, coord): D2g := d2metric (D1g, coord):
Cf1 := Christoffel1 (D1g):
RMN := Riemann(ginv, D2g, Cf1):
RMNc:=get_compts(RMN):

****

Componentele diferite de zero ale tensorului Riemann, R_{ijkl}, sunt date de următoarele linii de comandă:

****

map(proc(x) if RMNc[op(x)]<>0 then x=RMNc[op(x)] else NULL end if end proc, [indices(RMNc)]);

****

Rezultatul este prezentat mai jos folosind sintaxa: $R_{ijkl} \equiv [i,j,k,l]$, $\left(i,j,k,l = \overline{1,4}\right)$. În continuare sunt date doar componentele diferite de zero ale acestui tensor.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$[1,2,1,2] = a(z,t)^2\, e^{(2\,b(z,t))}\, e^{(-2\,b(z,t))}$$

$$\left(-\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)^2 + a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)^2 - a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2\right) /$$

$$e^{(2\,c(z,t))},\ [1,3,1,3] = e^{(2\,b(z,t))}\, a(z,t)\left(-2\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}a(z,t)\right)\right.$$

$$- a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}b(z,t)\right) - a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)$$

$$+ a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)$$

$$\left. + a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)\right),\ [1,4,1,4] = -e^{(2\,b(z,t))}\, a(z,t)\left(\right.$$

$$2\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(z,t)\right) + a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}b(z,t)\right) + a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right) - a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)$$

$$\left. - \left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right) - a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)\right),\ [2,3,2,4] = e^{(-2\,b(z,t))}$$

$$a(z,t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}a(z,t)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)\right.$$

$$+ a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}b(z,t)\right) - a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)$$

$$- a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)$$

$$\left. - a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)\right),$$

$$[3,4,3,4] = -e^{(2\,c(z,t))}\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}c(z,t)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}c(z,t)\right)\right),\ [1,3,1,4] = -e^{(2\,b(z,t))}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$a(z,t)\left(\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}a(z,t)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)\right.$$
$$+a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}b(z,t)\right)+a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)$$
$$-a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)$$
$$\left.-a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)\right),\ [2,4,2,4]=e^{(-2b(z,t))}a(z,t)\left(\right.$$

$$2\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(z,t)\right)+a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}b(z,t)\right)-a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)-a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)$$

$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)-a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)\right),\ [2,3,2,3]=e^{(-2b(z,t))}$$
$$a(z,t)\left(2\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}a(z,t)\right)+a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}b(z,t)\right)\right.$$
$$-a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)-a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)-a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)\right)\right]$$

3. Componentele tensorului Ricci, $R_{im}=R^{l}_{.ilm}$, unde $R^{l}_{.ilm}$ este tensorul Riemann mixt (contractat), pot fi determinate cu ajutorul liniilor de comandă de mai jos, iar rezultatul este prezentat sub forma $[R_{11},R_{12},R_{13},R_{14}]$, $[R_{21},R_{22},\ R_{23},R_{24}]$, $[R_{31},R_{32},R_{33},R_{34}]$, $[R_{41},R_{42},R_{43},R_{44}]$, fără virgule între parantezele pătrate.

****

ginv := invert(g, 'detg'):

BCU IAȘI / CENTRUL UNIVERSITAR LIBRARY

```
D1g := d1metric ( g, coord ): D2g := d2metric ( D1g, coord ):
Cf1 := Christoffel1 ( D1g ):
RMN := Riemann( ginv, D2g, Cf1 ):
RICCI := Ricci( ginv, RMN );

*****************************************************************
```

$$RICCI := \text{table}([compts =$$

$$\left[e^{(2\,b(z,t))} \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t} a(z,t) \right)^2 + 2\,a(z,t) \left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t) \right) \right.\right.$$

$$+ a(z,t) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} a(z,t) \right) + a(z,t)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} b(z,t) \right) - 2\,a(z,t) \left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} a(z,t) \right)$$

$$\left.\left. - a(z,t) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} a(z,t) \right) - a(z,t)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} b(z,t) \right) \right) \Big/ e^{(2\,c(z,t))}, 0, 0, 0 \right]$$

$$\left[0, e^{(-2\,b(z,t))} \left(\left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial t} a(z,t) \right)^2 - 2\,a(z,t) \left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t) \right) \right.\right.$$

$$+ a(z,t) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} a(z,t) \right) - a(z,t)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} b(z,t) \right) + 2\,a(z,t) \left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} a(z,t) \right)$$

$$\left.\left. - a(z,t) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} a(z,t) \right) + a(z,t)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} b(z,t) \right) \right) \Big/ e^{(2\,c(z,t))}, 0, 0 \right]$$

$$\left[0, 0, -\left(-2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} a(z,t) \right) - 2\,a(z,t) \left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t) \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial}{\partial z} c(z,t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t) \right) \right.\right.$$

$$\left. + 2 \left(\frac{\partial}{\partial t} c(z,t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} a(z,t) \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} c(z,t) \right) a(z,t) - \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} c(z,t) \right) a(z,t) \right) / a(z,t), 2$$

$$\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial t} a(z,t) \right) + a(z,t) \left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} c(z,t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t) \right) \right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{\partial}{\partial z} c(z,t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} a(z,t) \right) \right) / a(z,t) \right]$$

$$\left[0, 0, 2 \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial t} a(z,t) \right) + a(z,t) \left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t) \right) \right. \right.$$

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)\Big)/a(z,t)\,,-\Bigg(-2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(z,t)\right)$$

$$-2\,a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2+2\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)+2\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}c(z,t)\right)a(z,t)+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}c(z,t)\right)a(z,t)\Big)/a(z,t)\Bigg],$$

index_char = [-1, -1]

])

4. Invariantul de curbură (sau curbura scalară), $R = g^{ik}R_{ik}$, poate fi determinat cu ajutorul liniilor de comandă de mai jos.

****

```
ginv := invert( g, 'detg' ):
D1g := d1metric ( g, coord ):  D2g := d2metric ( D1g, coord ):
Cf1 := Christoffel1 ( D1g ):
RMN := Riemann( ginv, D2g, Cf1 ):
RICCI := Ricci( ginv, RMN ):
RS := Ricciscalar( ginv, RICCI );
```

****

şi este

$$RS := \text{table}([compts = 2\left(\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)^2+2\,a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}a(z,t)\right)\right.$$

$$\left.-2\,a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(z,t)\right)+a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)^2-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}c(z,t)\right)a(z,t)^2\right.$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}c(z,t)\right)a(z,t)^2-a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2\Bigg)\Big/\left(a(z,t)^2\,e^{(2c(z,t))}\right),$$

index_char = [ ]

])

5. Tensorul Einstein este dat de relația: $G_{ik}=R_{ik}-\frac{1}{2}R\,g_{ik}$, iar rezultatul calculelor este prezentat sub aceeași formă ca și în cazul tensorului Ricci.

****

ginv := invert(g, 'detg'):
D1g:=d1metric(g, coord): D2g:=d2metric(D1g, coord):
Cf1 := Christoffel1 (D1g):
RMN := Riemann(ginv, D2g, Cf1):
RICCI := Ricci(ginv, RMN):
RS := Ricciscalar(ginv, RICCI):

****

Tensorul Einstein este dat de linia de comandă

****

Estn := Einstein(g, RICCI, RS);

****

iar rezultatul este

Estn := table([*compts* =

$$\left[e^{(2b(z,t))}a(z,t)\left(2\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}a(z,t)\right)+a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}b(z,t)\right)\right.\right.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-2\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(z,t)\right)-a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}b(z,t)\right)$$

$$-a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}c(z,t)\right)a(z,t)-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}c(z,t)\right)a(z,t)$$

$$+a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2\Bigg)\Big/\,e^{(2c(z,t))},0,0,0\Bigg]$$

$$\Bigg[0,-e^{(-2b(z,t))}a(z,t)\Bigg(2\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}a(z,t)\right)$$

$$+a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}b(z,t)\right)-2\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(z,t)\right)$$

$$-a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}b(z,t)\right)+a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)^2-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}c(z,t)\right)a(z,t)$$

$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}c(z,t)\right)a(z,t)-a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2\Bigg)\Big/\,e^{(2c(z,t))},0,0\Bigg]$$

$$\Bigg[0,0,\Bigg(a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)^2-2\,a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)$$

$$-2\,a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)^2$$

$$+2\,a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(z,t)\right)+a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2\Bigg)\Big/\,a(z,t)^2,2\Bigg(\left(\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}a(z,t)\right)$$

$$+a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)\Bigg)/a(z,t)\Bigg]$$

$$\Bigg[0,0,2\Bigg(\left(\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}a(z,t)\right)+a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)\Bigg)/a(z,t),\left(a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2\right.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-2\,a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)-2\,a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)^2+2\,a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}a(z,t)\right)+a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)^2\Bigg)/$$

$$a(z,t)^2\Bigg],$$

index_char = [-1, -1]

])

6. Tensorul Weyl este dat de relația: $C_{ijkl}=R_{ijkl}-E_{ijkl}-G_{ijkl}$, unde $E_{ijkl}=\frac{1}{2}\left(g_{ik}S_{jl}+g_{jl}S_{ik}-g_{il}S_{jk}-g_{jk}S_{il}\right)$, cu $S_{ik}=R_{ik}-\frac{R}{4}g_{ik}$, iar $G_{ijkl}=\frac{R}{2}\times g_{ijkl}$, cu $g_{ijkl}=g_{ik}g_{jl}-g_{kl}g_{ij}$. Rezultatul este prezentat sub o formă care nu lasă loc la neclarități.

****

ginv := invert(g, 'detg'):
D1g:=d1metric(g, coord): D2g:= d2metric(D1g, coord):
Cfl := Christoffel1 (D1g):
RMN := Riemann(ginv, D2g, Cfl):
RICCI := Ricci(ginv, RMN):
RS := Ricciscalar(ginv, RICCI):
WEYL := Weyl(g, RMN, RICCI, RS):

****

Componentele diferite de zero ale tensorului Weyl, C_{ijkl}, $\left(i,j,k,l=\overline{1,4}\right)$, sunt date de linia de comandă

****

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

displayGR('Weyl', WEYL);

****

iar rezultatul este

The Weyl Tensor

non-zero components :

$$C1212 = -\frac{1}{3}a(z,t)^2 e^{(2b(z,t))} e^{(-2b(z,t))}\left(-\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)^2 - 2a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)^2 - a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}a(z,t)\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)^2 + 2a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2 + a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(z,t)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}c(z,t)\right)a(z,t)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}c(z,t)\right)a(z,t)^2\right) / e^{(2c(z,t))}$$

$$C1313 = \frac{1}{3}a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2 e^{(2b(z,t))} - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)^2 e^{(2b(z,t))} + \frac{1}{6}a(z,t)\,e^{(2b(z,t))}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(z,t)\right) - \frac{1}{2}a(z,t)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}b(z,t)\right)e^{(2b(z,t))} - \frac{1}{2}a(z,t)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}b(z,t)\right)e^{(2b(z,t))} - \frac{1}{3}a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)^2 e^{(2b(z,t))} - \frac{1}{6}a(z,t)\,e^{(2b(z,t))}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}a(z,t)\right) - \frac{1}{6}e^{(2b(z,t))}a(z,t)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}c(z,t)\right) + \frac{1}{6}e^{(2b(z,t))}a(z,t)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}c(z,t)\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)^2 e^{(2b(z,t))} - a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)e^{(2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right) - a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)e^{(2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$+ e^{(2\,b(z,t))}\, a(z,t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t)\right)$$
$$+ e^{(2\,b(z,t))}\, a(z,t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right)$$

$$C1314 = -a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t)\right) e^{(2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t)\right)$$
$$- a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right) e^{(2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t} a(z,t)\right) - a(z,t)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t} b(z,t)\right) e^{(2\,b(z,t))}$$

$$+ e^{(2\,b(z,t))}\, a(z,t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right)$$
$$+ e^{(2\,b(z,t))}\, a(z,t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t)\right)$$

$$C1414 = -\frac{1}{3} a(z,t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t)\right)^2 e^{(2\,b(z,t))} + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial t} a(z,t)\right)^2 e^{(2\,b(z,t))}$$
$$- \frac{1}{6} a(z,t)\, e^{(2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} a(z,t)\right) - \frac{1}{2} a(z,t)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} b(z,t)\right) e^{(2\,b(z,t))}$$

$$- \frac{1}{2} a(z,t)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} b(z,t)\right) e^{(2\,b(z,t))} + \frac{1}{3} a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right)^2 e^{(2\,b(z,t))}$$
$$+ \frac{1}{6} a(z,t)\, e^{(2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} a(z,t)\right) + \frac{1}{6} e^{(2\,b(z,t))}\, a(z,t)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} c(z,t)\right)$$

$$- \frac{1}{6} e^{(2\,b(z,t))}\, a(z,t)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} c(z,t)\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t)\right)^2 e^{(2\,b(z,t))}$$
$$- a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t)\right) e^{(2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t} a(z,t)\right)$$

$$+ e^{(2\,b(z,t))}\, a(z,t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t)\right)$$
$$+ e^{(2\,b(z,t))}\, a(z,t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right)$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$- a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right) e^{(2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t)\right)$$

$$C2323 = -\frac{1}{3} a(z,t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right)^2 e^{(-2\,b(z,t))} - \frac{1}{6} a(z,t)\, e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} a(z,t)\right)$$
$$+ \frac{1}{2} a(z,t)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} b(z,t)\right) e^{(-2\,b(z,t))} + a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right) e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t)\right)$$

$$+ \frac{1}{3} a(z,t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t)\right)^2 e^{(-2\,b(z,t))} + \frac{1}{6} a(z,t)\, e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} a(z,t)\right)$$
$$+ \frac{1}{2} a(z,t)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} b(z,t)\right) e^{(-2\,b(z,t))} + a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t)\right) e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t} a(z,t)\right)$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t)\right)^2 e^{(-2\,b(z,t))} - a(z,t)^2\, e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z} c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right)$$
$$- a(z,t)^2\, e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t} c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t)\right) - \frac{1}{6} a(z,t)^2\, e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} c(z,t)\right)$$

$$+ \frac{1}{6} a(z,t)^2\, e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} c(z,t)\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial t} a(z,t)\right)^2 e^{(-2\,b(z,t))}$$

$$C2324 = a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t)\right) e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t)\right)$$
$$+ a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right) e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t} a(z,t)\right) + a(z,t)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial t} b(z,t)\right) e^{(-2\,b(z,t))}$$

$$- a(z,t)^2\, e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t} c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right)$$
$$- a(z,t)^2\, e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z} c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} b(z,t)\right)$$

$$C2424 = \frac{1}{3} a(z,t)^2 \left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right)^2 e^{(-2\,b(z,t))} + \frac{1}{6} a(z,t)\, e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} a(z,t)\right)$$
$$+ \frac{1}{2} a(z,t)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} b(z,t)\right) e^{(-2\,b(z,t))} + a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial z} b(z,t)\right) e^{(-2\,b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z} a(z,t)\right)$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$-\frac{1}{3}a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2 e^{(-2b(z,t))}-\frac{1}{6}a(z,t)\,e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(z,t)\right)$$
$$+\frac{1}{2}a(z,t)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}b(z,t)\right)e^{(-2b(z,t))}+a(z,t)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)^2 e^{(-2b(z,t))}-a(z,t)^2\,e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial z}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)$$
$$-a(z,t)^2\,e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial}{\partial t}c(z,t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)+\frac{1}{6}a(z,t)^2\,e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}c(z,t)\right)$$

$$-\frac{1}{6}a(z,t)^2\,e^{(-2b(z,t))}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}c(z,t)\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)^2 e^{(-2b(z,t))}$$

$$C3434=\frac{1}{3}e^{(2c(z,t))}\left(-\left(\frac{\partial}{\partial t}a(z,t)\right)^2-2\,a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial z}b(z,t)\right)^2-a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}a(z,t)\right)\right.$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}a(z,t)\right)^2+2\,a(z,t)^2\left(\frac{\partial}{\partial t}b(z,t)\right)^2+a(z,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}a(z,t)\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}c(z,t)\right)a(z,t)^2$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}c(z,t)\right)a(z,t)^2\right)\Big/\,a(z,t)^2$$

character : [-1, -1, -1, -1]

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ANEXA A

ELEMENTE DE CALCUL TENSORIAL

§ A.1. Spaţii n - dimensionale

Un spaţiu cu n dimensiuni, S_n, este o mulţime de elemente, numite puncte, care se găsesc în corespondenţă biunivocă şi bicontinuă cu valorile a n variabile reale, $x^1, x^2, ..., x^n$. Variabilele $x^1, x^2, ..., x^n$ se numesc *coordonate.* Unui sistem de valori ale coordonatelor, $x^1, x^2, ..., x^n$, îi corespunde un punct (figurativ) în S_n şi reciproc. Numărul coordonatelor defineşte *dimensiunea* spaţiului (n, în cazul nostru).

Fie un alt sistem de coordonate, $x'^1, x'^2, ..., x'^m$ în S_n şi să considerăm transformarea

$$x^i = x^i\left(x'^k\right), \left(i,k=\overline{1,n}\right). \tag{A.1}$$

Dacă determinantul funcţional al transformării (A.1),

$$D = \frac{\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)}{\left(x'^1, x'^2, ..., x'^m\right)} \tag{A.2}$$

este diferit de zero, transformarea este local *reversibilă* sau *biunivocă* şi mai avem

$$x'^k = x'^k\left(x^i\right), \left(i,k=\overline{1,n}\right), \tag{A.3}$$

adică $x'^1, x'^2, ..., x'^m$ pot constitui, la rândul lor, un sistem de coordonate în S_n. Cu alte cuvinte, alegerea setului de coordonate nu este unică.

O transformare de tipul (A.1) sau (A.3) se numeşte *transformare de coordonate.* Cele două transformări sunt una inversa celeilalte. Dacă variabilele x^i sunt liniare în raport cu x'^k, transformarea (A.1) se numeşte *liniară* sau *afină.* În acest caz, transformarea (A.3) este de asemenea liniară.

Dacă în spaţiul S_n se defineşte legea de calcul a distanţei dintre două puncte, spaţiul se numeşte *metrizat* sau *metric*, iar expresia elementului de arc poartă numele de *metrică.* În caz contrar, spaţiul se numeşte *amorf.*

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Fie o funcție de punct $f\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$. Dacă transformarea (A.1) are ca rezultat

$$f\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) = f\left(x'^1, x'^2, ..., x'^n\right), \tag{A.4}$$

spunem că $f\left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ este un *invariant.*

§ A.2. Vectori contravarianți și covarianți

Din (A.3) deducem prin diferențiere

$$dx'^k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dx^i = \overline{x}_i^k dx^i, \tag{A.5}$$

unde am utilizat notația

$$\overline{x}_i^k \equiv \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \tag{A.6}$$

și am utilizat convenția de sumare după indicii care se repetă în cadrul aceluiași produs (convenția lui Einstein).

Un sistem de mărimi, $A^1, A^2, ..., A^n$, care, în urma transformării (A.1), se transformă ca și diferențialele de coordonate (A.5), adică după legea

$$A'^k = \overline{x}_i^k A^i, \quad \left(i,k = \overline{1,n}\right), \tag{A.7}$$

formează un *tensor contravariant de ordinul întâi* sau un *vector contravariant n-dimensional.* Cantitățile $A^i \left(i = \overline{1,n}\right)$ se numesc componentele vectorului contravariant în variabilele x^i, în timp ce A'^i sunt componentele aceluiași vector în variabilele x'^i. Observând că

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k = \underline{x}_k^i dx'^k, \tag{A.8}$$

unde am introdus notația

$$\underline{x}_k^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}, \tag{A.9}$$

vom defini legea de transformare a componentelor unui vector n-dimensional contravariant la transformarea inversă prin

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$A^i = \underline{x}^i_k A'^k . \tag{A.10}$$

Cantităţile $\overline{x}^k_i$ şi $\underline{x}^k_i$ sunt, totodată, elementele matricei de transformare directă, respectiv cea inversă.

Fie acum funcţia $f\left(x^i\right)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ şi să efectuăm derivatele parţiale

$$\frac{\partial f}{\partial x'^i} = \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \underline{x}^k_i \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad \left(i,k=\overline{1,n}\right). \tag{A.11}$$

Un sistem de n mărimi B_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$, care la transformarea (A.1) se transformă ca şi derivatele parţiale (A.11) ale unei funcţii scalare, adică după legea

$$B'_i = \underline{x}^k_i B_k , \tag{A.12}$$

defineşte un *tensor covariant de ordinul întâi* sau un *vector covariant n-dimensional.*

Transformarea inversă este

$$B_k = \overline{x}^i_k B'_i . \tag{A.13}$$

În spaţiul euclidian cu coordonate carteziene ortogonale (vezi Anexa B) avem $\overline{x}^k_i = \underline{x}^i_k = a_{ik}$, prin urmare, noţiunile de vector contravariant şi covariant coincid.

Să arătăm că produsul sumat dintre un vector contravariant şi unul covariant este un invariant. Avem

$$A'^k B'_k = \overline{x}^k_l \underline{x}^m_k A^l B_m = \delta^m_l A^l B_m = A^m B_m , \tag{A.14}$$

ceea ce demonstrează afirmaţia.

§ A.3. Tensori de ordinul al doilea

Un sistem de n^2 mărimi, T^{ik}, formează un *tensor contravariant* de ordinul al doilea dacă la schimbarea coordonatelor se transformă ca şi produsul $A^i B^k$, adică după legea

$$T'^{ik} = \overline{x}^i_l \overline{x}^k_m T^{lm} \; ; \quad T^{ik} = \underline{x}^i_l \underline{x}^k_m T'^{lm} . \tag{A.15}$$

Un sistem de n^2 mărimi T_{ik} formează un *tensor covariant* de ordinul al doilea dacă la schimbarea coordonatelor se transformă ca şi produsul $A_i B_k$, adică după legea

BCU IAŞI CETATEA UNIVERSITARĂ LIBRARY

$$T'_{ik} = \underline{x}^l_i \underline{x}^m_k T_{lm}\,;\; T_{ik} = \overline{x}^l_i \overline{x}^m_k T'_{lm}\,. \tag{A.16}$$

Un sistem de n^2 cantităţi $V^i{}_k$ care la schimbarea coordonatelor se transformă ca şi produsul $A^i B_k$, adică după legea

$$V'^i_{\bullet k} = \overline{x}^i_l \underline{x}^m_k V^l_{\bullet m}\,;\; V^i_{\bullet k} = \underline{x}^i_l \overline{x}^m_k V'^l_{\bullet m} \tag{A.17}$$

formează un *tensor mixt* de ordinul al doilea. Un astfel de tensor este simbolul lui Kronecker δ^i_k. Într-adevăr,

$$\delta'^i_k = \overline{x}^i_l \underline{x}^m_k \delta^l_m = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial x'^k} = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^k} = \delta^i_k\,. \tag{A.18}$$

În relaţia (A.17 - 1) primul indice este i. Acesta poate fi coborât cu ajutorul tensorului metric g_{ik} (vezi paragraful următor), în stânga lui k, în locul indicat de punctul de sub i. La fel, indicele k poate fi ridicat în dreapta lui i printr-un procedeu similar. În text nu vom utiliza punctul, iar primul indice va fi specificat numai atunci când va fi necesar. Dacă tensorul este simetric, nu are importanţă ordinea indicilor, aceştia putându-se scrie unul sub altul. Un exemplu în acest sens este simbolul lui Kronecker [vezi (A.18)].

Utilizând proprietăţile tensorilor de ordinul întâi şi al doilea, să arătăm că produsul $T^{ik}A_iB_k$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ este invariant la o transformare de coordonate. Întradevăr, avem

$$T'^{ik}A'_iB'_k = \overline{x}^i_l \overline{x}^k_m \underline{x}^p_i \underline{x}^q_k T^{lm}A_pB_q = \delta^p_l \delta^q_m T^{lm}A_pB_q = T^{pm}A_pB_m\,. \tag{A.19}$$

§ A.4. Tensorul metric fundamental

Fie un spaţiu euclidian E_m şi $y_1, y_2, ..., y_m$ coordonatele carteziene ale unui punct P în acest spaţiu. (Spaţiul *euclidian* sau *homaloidal* este acel spaţiu în care sunt valabile axiomele lui Euclid; un astfel de spaţiu este fără curbură, sau *plat*). Pătratul distanţei (infinitezimale) dintre punctul P şi unul vecin P', numit şi *metrica* varietăţii E_m, este

$$ds^2 = dy_j dy_j \quad \left(j=\overline{1,m}\right). \tag{A.20}$$

BCU IAŞI / CENTRALUNIVERSITY LIBRARY

Să considerăm în E_m o varietate (subspațiu) R_n $(n<m)$, și fie $x^1, x^2, ..., x^n$, coordonale unui punct în R_n. În mod evident,

$$y_j = y_j\left(x^1, x^2, ..., x^n\right), \left(j=\overline{1,m}\right). \tag{A.21}$$

Metrica varietății R_n va fi atunci

$$ds^2 = \frac{\partial y_j}{\partial x^i}\frac{\partial y_j}{\partial x^k}dx^i dx^k = g_{ik}dx^i dx^k, \tag{A.22}$$

unde am notat

$$g_{ik}\left(x^1, x^2, ..., x^n\right) = \frac{\partial y_j}{\partial x^i}\frac{\partial y_j}{\partial x^k}\left(j=\overline{1,m};\ i,k=\overline{1,n}\right). \tag{A.23}$$

Forma pătratică (A.23) este pozitiv definită, iar potrivit lui (A.19) este invariantă la o transformare de coordonate. Cum dx^i și dx^k sunt vectori contravarianți, rezultă că g_{ik} definit prin (A.23) reprezintă componentele unui tensor covariant simetric, numit *tensor metric fundamental* sau, pe scurt, *tensor metric*. Întrucât

$$dx_i = g_{ik}dx^k, \tag{A.24}$$

mai putem scrie $ds^2 = dx_i dx^i$. Relația (A.24) este valabilă pentru componentele unui vector oarecare A^k, așadar

$$A_i = g_{ik}A^k, \left(i,\ k=\overline{1,n}\right). \tag{A.25}$$

Relațiile (A.25) pot fi considerate ca un sistem de n ecuații algebrice liniare în necunoscutele $A^1, A^2, ..., A^n$. Rezolvând acest sistem după regula lui Cramer, obținem

$$A^k = g^{kj}A_j, \left(j,\ k=\overline{1,n}\right), \tag{A.26}$$

unde

$$g^{kj} = \frac{G_{kj}}{g} \tag{A.27}$$

sunt componentele *tensorului metric contravariant*. Aici am notat cu G_{kj} complementul algebric al elementului g_{kj} din determinantul $g = det\left(g_{kj}\right)$.

Cum $G_{kj} = G_{jk}$, avem $g^{kj} = g^{jk}$, iar din (A.25) deducem că

$$A_i = g_{ik}A^k = g_{ik}g^{kj}A_j, \tag{A.28}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

şi, prin urmare

$$g_{ik}g^{jk} = g_i^j = \delta_i^j . \tag{A.29}$$

Utilizând tensorii metrici fundamentali g_{ik} şi g^{ik}, dintr-un vector contravariant se poate obţine un vector covariant şi reciproc, potrivit relaţiilor (A.26) şi (A.27). Într-un spaţiu euclidian $g_{ik} = \delta_{ik}$, deci

$$A_i = \delta_{ik}A^k = A^i ,$$

prin urmare, componentele contravariante şi cele covariante ale unui vector se confundă. De aceea, din motive de comoditate, se utilizează exclusiv indici inferiori [vezi (A.21)].

§ A.5. Tensori de ordin superior

În mod analog se definesc tensorii de ordinul al treilea, al patrulea etc. De pildă, sistemul de n^{m+s} elemente, $T^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{k_1 k_2 \ldots k_m}$, (din corpul numerelor reale) care la schimbarea coordonatelor se transformă după legea

$$T'^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{k_1 k_2 \ldots k_m} = \underline{x}^{p_1}_{k_1}\, \underline{x}^{p_2}_{k_2} \ldots \underline{x}^{p_m}_{k_m}\, \overline{x}^{j_1}_{i_1}\, \overline{x}^{j_2}_{i_2} \ldots \overline{x}^{j_s}_{i_s}\, T^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{p_1 p_2 \ldots p_m} \tag{A.30}$$

unde primii indici sunt cei de contravarianţă, formează un tensor de ordin (sau rang) $(m+s)$, de m ori covariant şi de s ori contravariant. În general, numărul de indici indică ordinul tensorului.

§ A.6. Operaţii cu tensori

A.6.1. Adunarea

Suma a doi (sau mai mulţi) tensori se poate defini numai pentru tensori de acelaşi ordin şi aceeaşi varianţă.

De exemplu, suma tensorilor $U^{ij}{}_k$ şi $V^{ij}{}_k$ este tensorul

$$T^{ij}{}_k = U^{ij}{}_k + V^{ij}{}_k , \tag{A.31}$$

unde $T^{ij}{}_k$ este de acelaşi tip şi acelaşi ordin cu tensorii daţi. Scăderea a doi tensori se defineşte în mod similar.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

A.6.2. Înmulțirea

Fie $U_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ și $V_{m_1 m_2 \dots m_s}^{k_1 k_2 \dots k_r}$ doi tensori de tipuri și ordine arbitrare. Produsul tensorial al celor doi tensori se definește prin

$$T_{j_1 j_2 \dots j_q m_1 m_2 \dots m_s}^{i_1 i_2 \dots i_p k_1 k_2 \dots k_r} = U_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p} V_{m_1 m_2 \dots m_s}^{k_1 k_2 \dots k_r}, \tag{A.32}$$

și este un tensor de ordin $p+r+q+s$, de $p+r$ ori contravariant și de $q+s$ ori covariant.

A.6.3. Contracția

Fie un tensor (T) de ordin $p \geq 2$. Să egalăm doi indici oarecare, unul inferior și unul superior, și să sumăm după acești indici (după valoarea lor comună). Operația se numește *contracție* (saturare) în raport cu cei doi indici, iar tensorul astfel obținut – *tensor o dată contractat.* Printr-o contracție, ordinul tensorial se reduce cu două unități. De pildă, prin contracția indicilor i și k ai tensorului T_k^{ij} obținem

$$T'^{ij}{}_i = \bar{x}_p^i \, \bar{x}_q^j \, \underline{x}_i^r \, T^{pq}{}_r = \delta_p^r \, \bar{x}_q^j \, T^{pq}{}_r = \bar{x}_q^j \, T^{pq}{}_p, \tag{A.33}$$

adică un vector contravariant. În general, dacă tensorului $T_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ îi egalăm primii s indici de covarianță cu primii s indici de contravarianță (subînțelegându-se sumare după valoarea comună a oricărei perechi de doi indici dintre care unul de covarianță și celălalt de contravarianță), obținem tensorul $U_{j_{s+1} j_{s+2} \dots j_q}^{i_{s+1} i_{s+2} \dots i_p}$, de $p-s$ ori contravariant și de $q-s$ ori covariant.

A.6.4. Ridicarea și coborârea indicilor

Fie tensorul $T^i{}_{jkl}$, o dată contravariant și de trei ori covariant. Înmulțindu-l cu g_{is} și sumând după i, avem

$$g_{is} T^i{}_{jkl} = T_{sjkl}, \tag{A.34}$$

care este un tensor pur covariant, obținut prin înmulțirea potrivită a lui $T^i{}_{jkl}$ cu tensorul metric fundamental. Spunem că *am coborât* indicele i.

În mod asemănător se poate realiza *ridicarea* unui indice. În cazul nostru, de pildă

$$g^{sj} T^i{}_{jkl} = T^{is}{}_{kl}. \tag{A.35}$$

În general, coborârea/ridicarea unui indice al unui tensor (T) se rea-

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

lizează prin înmulțirea potrivită cu tensorul metric fundamental și sumarea după o pereche de indici, unul de covarianță/contravarianță aparținând lui g_{ik}/g^{ik} și celălalt de contravarianță/ covarianță aparținând tensorului (T). Pentru coborârea / ridicarea a n indici operația trebuie repetată de n ori.

Observație: Ridicarea (coborârea) indicilor nu modifică ordinul unui tensor, ci doar tipul (varianța) acestuia.

A.6.5. Tensori simetrici și antisimetrici

Fie tensorul $T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$ cu $p,\ q \geq 2$. Dacă componentele tensorului nu se modifică la o permutare oarecare a unui grup de indici, fie de covarianță, fie de contravarianță, spunem că tensorul este *simetric* în acel grup de indici. Dacă, de exemplu, tensorul (T) definit mai sus este simetric în primii s indici de covarianță, $j_1 j_2 \dots j_s$, aceasta se notează astfel: $T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{(j_1 j_2 \dots j_s) j_{s+1} \dots j_q}$. Numărul de componente esențial distincte ale acestui tensor este dat de $\left(C_n^s\right) n^{p+q-s}$, unde $\left(C_n^s\right)$ este numărul combinărilor cu repetiție al celor n obiecte (dimensiunea spațiului) luate câte s (grupul indicilor de simetrie)

$$\left(C_n^s\right) = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+s-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s}. \qquad \text{(A.36)}$$

De pildă, tensorul covariant de ordinul al doilea T_{ik} este simetric dacă

$$T_{ik} = T_{ki}, \qquad \text{(A.37)}$$

și, potrivit lui (A.36), acesta va avea $n(n+1)/2$ componente esențial distincte (6 într-un spațiu cu 3 dimensiuni, 10 într-un spațiu cu 4 dimensiuni etc.).

Dacă semnul tensorului (T) se schimbă prin permutarea a doi indici oarecare dintr-un grup de indici, fie de covarianță, fie de contravarianță (dar niciodată combinați !), tensorul se numește *antisimetric* în raport cu acel grup de indici. Fie (T) antisimetric în primii s indici de covarianță și să notăm prin $[j_1 j_2 \dots j_s]$ grupul acestor indici, adică, $T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{[j_1 j_2 \dots j_s] j_{s+1} \dots j_q}$. Avem atunci

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{[j_1 j_2 \dots j_s] j_{s+1} \dots j_q} = (-1)^I T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{(j'_1 j'_2 \dots j'_s) j_{s+1} \dots j_q}, \tag{A.38}$$

unde $(j'_1 j'_2 \dots j'_s)$ este o permutare oarecare a indicilor $(j_1 j_2 \dots j_s)$, iar I este numărul de inversiuni introduse de permutare față de ordinea inițială. În aceasta categorie intră, de pildă, simbolul de permutare al lui Levi-Civita, ε_{ijk}.

Numărul de componente esențial distincte ale unui tensor antisimetric [care satisface relația (A.38)] este dat de $C_n^s n^{p+q-s}$, unde C_n^s sunt combinările a n elemente luate câte s

$$C_n^s = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s}. \tag{A.39}$$

De pildă, tensorul covariant de ordinul al doilea A_{ik} este antisimetric dacă

$$A_{ik} = -A_{ki}, \tag{A.40}$$

și are $n(n-1)/2$ componente esențial distincte (3 într-un spațiu cu 3 dimensiuni, 6 într-un spațiu cu 4 dimensiuni etc.).

Din proprietatea de antisimetrie: $A_{ik} = -A_{ki}$, pentru $i = k$ obținem $A_{ii} = 0$ (fără sumare). În general, dacă grupul indicilor de antisimetrie al unui tensor conține doi indici egali, componenta respectivă a tensorului se anulează.

Un tensor care se bucură de proprietatea $T_i^k = 0$ pentru $i \neq k$ se numește *tensor diagonal.* Un astfel de tensor este, de pildă, simbolul lui Kronecker: $\delta_i^k = g_i^k$. Se mai numește *tensor unitate simetric de ordinul al doilea.*

Observație: Pentru a stabili numărul de componente esențial distincte ale unui tensor, este necesar a investiga dacă între componentele acestuia nu există și alte relații, în afara celor de simetrie sau antisimetrie. De pildă, tensorul simetric T_{ik} a cărui *trasă* (*spur*, *urmă* – suma elementelor de pe diagonala principală) este nulă, nu are 6 componente esențial distincte, cum suntem tentați a afirma, ci doar 5 $(=6-1)$. În general, pentru a afla numărul de componente esențial distincte ale unui tensor, din numărul de componente dat de relațiile $(C_n^s) n^{p+q-s}$ (pentru indicii de

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

simetrie) şi $C_n^s\, n^{p+q-s}$ (pentru indicii de antisimetrie) se scad atâtea unităţi, câte relaţii independente suplimentare satisfac componentele tensorului respectiv.

A.6.6. Simetrizarea şi alternarea

Prin *simetrizare* se înţelege formarea unui tensor simetric dintr-un tensor oarecare. Astfel, din tensorul $T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ se poate forma un tensor simetric în primii s indici de covarianţă prin operaţia

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{(j_1 j_2 \ldots j_s) j_{s+1} \ldots j_q} = \frac{1}{s!} \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_s} T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_s j_{s+1} \ldots j_q}, \qquad \text{(A.41)}$$

unde suma se extinde la toate permutările indicilor $j_1 j_2 \ldots j_s$. De pildă, cantităţile

$$T_{(ik)} = (T_{ik} + T_{ki})/2 \qquad \text{(A.42)}$$

sunt componentele unui tensor de ordinul al doilea simetric.

Operaţia de trecere de la tensorul $T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ la tensorul $T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{[j_1 j_2 \ldots j_q]}$ prin

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{[j_1 j_2 \ldots j_q]} = \frac{1}{q!} \sum_{j'_1, j'_2, \ldots, j'_q} (-1)^I T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j'_1 j'_2 \ldots j'_q}, \qquad \text{(A.43)}$$

unde suma se extinde la toate permutările diferite $(j'_1 j'_2 \ldots j'_q)$ ale indicilor fixaţi $j_1 j_2 \ldots j_q$, iar I este numărul inversiunilor din permutarea $j'_1 j'_2 \ldots j'_q$ faţă de ordinea iniţială, se numeşte *alternare*. Tensorul $T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{[j_1 j_2 \ldots j_q]}$ se numeşte *tensor alternat* al tensorului $T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$. Dacă doi dintre indicii $j_1 j_2 \ldots j_q$ sunt egali, sumele din (A.43) sunt nule. De pildă, tensorul alternat al lui T_{ik} este

$$T_{[ik]} = (T_{ik} - T_{ki})/2 \,. \qquad \text{(A.44)}$$

Aplicaţie: Orice tensor de ordinul al doilea T_{ik} se poate descompune în mod unic în suma dintre un tensor simetric S_{ik} şi unul alternat A_{ik}.

Într-adevăr,

$$T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) = S_{ik} + A_{ik} \,. \qquad \text{(A.45)}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ANEXA B

TENSORI DE ORDINUL ÎNTÂI (VECTORI) ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN TRIDIMENSIONAL

§ B.1. Coordonate carteziene

Un spațiu euclidian tridimensional, E_3, este un sistem de puncte aflate în corespondență biunivocă și bicontinuă cu un sistem de trei coordonate x_1, x_2 și x_3. Dacă cele trei coordonate definesc un sistem ordonat de trei direcții reciproc ortogonale, acestea se numesc *coordonate carteziene.* Cele trei direcții se mai numesc *axe de coordonate.* Sistemul cartezian de coordonate se definește prin trei *versori* (*vectori unitari*), $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ și $\vec{u}_3$, ce satisfac condiția $\vec{u}_1 \cdot (\vec{u}_2 \times \vec{u}_3) = 0$, și formează o *bază ortonormată.* Fie a_i $(i = 1,2,3)$ componentele vectorului $\vec{a}$ în baza ortonormată $\vec{u}_i$ $(i = 1,2,3)$. Utilizând convenția sumării după indici repetați, vom scrie expresia analitică a vectorului $\vec{a}$ sub forma

$$\vec{a} = a_i \vec{u}_i . \tag{B.1}$$

Vectorul ce definește poziția unui punct oarecare în E_3 se notează prin $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$, se numește *vector de poziție* și are expresia analitică

$$\vec{r} = x_i \vec{u}_i . \tag{B.2}$$

Produsul scalar. Fie doi vectori oarecare $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Lăsând la o parte operațiile de ordinul întâi, vom defini *produsul scalar* al celor doi vectori prin

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_i \vec{u}_i) \cdot (b_k \vec{u}_k) = a_i b_i = ab \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right), \tag{B.3}$$

căci

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_k = \delta_{ik} . \tag{B.4}$$

Produsul vectorial. Prin definiție, produsul vectorial al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ este

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}=\varepsilon_{ijk}\,a_j b_k\,\vec{u}_i \overset{\text{simbolic}}{=} \begin{vmatrix}\vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix};$$
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=ab\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) \tag{B.5}$$

precum şi $$\vec{u}_i\times\vec{u}_j=\varepsilon_{ijk}\,\vec{u}_k;\ \vec{u}_s=\frac{1}{2}\varepsilon_{sij}\,\vec{u}_i\times\vec{u}_j, \tag{B.6}$$

unde

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}+1, & i,j,k \quad \text{permut. cicl. } 1,2,3;\\ -1, & i,j,k \quad \text{permut. necicl. } 1,2,3;\\ 0, & \text{cel puţin doi indici egali},\end{cases} \tag{B.7}$$

este *simbolul de permutare al lui Levi-Civita* (vezi § **B. 5**). Se verifică uşor proprietatea

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\begin{vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn}\end{vmatrix}. \tag{B.8}$$

Pentru $i=l$, avem

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}=\delta_{jm}\,\delta_{kn}-\delta_{jn}\,\delta_{km}, \tag{B.8'}$$

iar pentru $i=l$ şi $j=m$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn}=2\,\delta_{kn}. \tag{B.8''}$$

Fie acum trei vectori oarecare, $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$. Printre altele, cu aceşti vectori se pot defini următoarele două tipuri de produse

1. Produsul mixt

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}, \tag{B.9}$$

în particular,

$$\vec{u}_i\cdot\left(\vec{u}_j\times\vec{u}_k\right)=\varepsilon_{ijk}, \tag{B.10}$$

relaţie ce poate fi considerată drept o sui-generis definiţie a simbolului Levi-Civita.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

2. Produsul dublu vectorial

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\,. \tag{B.11}$$

§ B.2. Transformări ortogonale de coordonate

Trecerea de la un referențial triortogonal $S\ (Oxyz)$ la un altul, $S'\ (O'x'y'z')$, se poate realiza prin trei modalități fundamentale:

- translația axelor de coordonate ;
- rotația axelor ;
- operația de oglindire .

Primele două tipuri de transformări nu modifică orientarea reperului S' în raport cu S (*transformări proprii*), în timp ce oglindirea (de exemplu: $x'=-x,\ y'=y,\ z'=z$) schimbă orientarea reperelor (un reper drept trece în unul stâng şi reciproc – *transformare improprie*). Sunt posibile, evident, şi combinații ale operațiilor de mai sus, cu observația că două transformări proprii dau tot o transformare proprie (de pildă translație + rotație), în timp ce o transformare proprie însoțită de una improprie (de exemplu translație + oglindire) conduc la o transformare improprie.

Să admitem că S şi S' au aceeaşi origine şi fie $\vec{u}_i$ şi $\vec{u}'_i$ cele două baze ortonormate. Exprimând vectorul de poziție $\vec{r}$ în cele două baze, avem

$$\vec{r}=x_i\vec{u}_i=x'_i\,\vec{u}'_i\,, \tag{B.12}$$

de unde deducem

$$\begin{cases} x'_i=a_{ik}x_k\,; & a_{ik}=\vec{u}'_i\cdot\vec{u}_k\,, \\ x_i=a_{ki}x'_k\,; & a_{ki}=\vec{u}'_k\cdot\vec{u}_i\,. \end{cases} \tag{B.13}$$

De asemenea,

$$\vec{u}'_i=a_{ik}\vec{u}_k\,;\ \ \vec{u}_i=a_{ki}\vec{u}'_i\,. \tag{B.14}$$

Coeficienții a_{ik} formează *matricea transformării ortogonale* (B.13-1), iar a_{ki} - *matricea transformării inverse* (B.13-2).

Din invarianța pătratului distanței dintre două puncte:

$$r^2=x_ix_i=x'_k\,x'_k\,,$$

deducem *condiția de ortogonalitate*

BOJAI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$a_{ik}a_{im} = \delta_{km},\ (i,k,m = 1,2,3). \tag{B.15}$$

Aplicând regula de înmulţire a determinanţilor, se găseşte că

$$\det(a_{ik}) = \pm 1. \tag{B.16}$$

Pe de altă parte,

$$\det(a_{ik}) = \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}, \tag{B.17}$$

adică

$$\varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = \pm 1, \tag{B.18}$$

sau

$$\varepsilon_{ijk} a_{li} a_{mj} a_{nk} = \pm\, \varepsilon_{lmn} = \varepsilon_{lmn} \det(a_{ik}). \tag{B.19}$$

Aici semnul plus corespunde cazului când cele două repere au aceeaşi orientare, iar semnul minus cazului când reperele au orientări diferite.

La schimbarea bazei ortonormate [vezi (B.13) şi (B.14)], avem

$$\begin{aligned}
&\vec{p} + \vec{q} = p_i \vec{u}_i + q_i \vec{u}_i = p_i a_{mi} \vec{u}'_m + q_i a_{mi} \vec{u}'_m = p'_m \vec{u}'_m + q'_m \vec{u}'_m = \vec{p}' + \vec{q}';\\
&\vec{p} \cdot \vec{q} = p_i q_i = (a_{mi} p'_m) \cdot (a_{si} q'_s) = \delta_{ms} p'_m q'_s = p'_s q'_s = \vec{p}' \cdot \vec{q}';\\
&\vec{p} \times \vec{q} = \varepsilon_{ijk} p_j q_k \vec{u}_i = \varepsilon_{ijk} a_{mj} a_{sk} a_{li} p'_m q'_s \vec{u}'_l = (\vec{p}' \times \vec{q}') \det(a_{ik});\\
&\vec{p} \cdot (\vec{q} \times \vec{r}) = \varepsilon_{ijk} p_i q_j r_k = \varepsilon_{ijk} a_{li} a_{mj} a_{nk} p'_l q'_m r'_n = \vec{p}' \cdot (\vec{q}' \times \vec{r}') \det(a_{ik}).
\end{aligned} \tag{B.20}$$

Prin urmare, operaţiile de adunare (scădere) şi produs scalar a doi vectori nu se modifică la schimbarea bazei, în timp ce produsul vectorial şi cel mixt îşi schimbă semnul sau nu, după cum cele două baze au sau nu aceeaşi orientare.

Numim *scalari de speţa întâi* sau *invarianţi scalari* (sau, simplu, *scalari*) acei scalari al căror semn, la trecerea de la o bază la alta, nu depinde de orientarea relativă a bazelor (exemple: temperatura, masa, lucrul mecanic, sarcina electrică etc.). Scalarii al căror semn depinde de orientarea relativă a bazelor se numesc *scalari de specia a doua* sau *pseudoscalari* (exemplu: momentul unei forţe faţă de o axă).

Numim *vectori polari* (sau, simplu, *vectori*) acei vectori care, la o transformare improprie, îşi schimbă semnul (exemple: viteza unei particule, intensitatea câmpului electric, gradientul unui invariant scalar etc.). Vectorii care nu-şi schimbă semnul la o astfel de transformare se numesc *vectori de speţa a doua* sau *vectori axiali*, sau, încă, *pseudovectori*

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

(exemple: produsul vectorial a doi vectori polari, inducția magnetică, rotorul unui vector polar, viteza unghiulară etc.). De pildă, la inversia spațială $x'_i = -x_i$, pentru un vector polar avem: $A'_i = -A_i$, iar pentru un pseudovector avem: $B'_i = B_i$.

§ B.3. Elemente de analiză vectorială

B.3.1. Câmpuri scalare şi vectoriale

Dacă fiecărui punct, $P \in D$, $(D \subset E_3)$ îi corespunde o valoare a unui scalar, $\varphi(P)$, spunem că în domeniul D s-a definit un *câmp scalar.* Dacă fiecărui punct, $P \in D$, $(D \subset E_3)$ i se poate asocia o mărime vectorială, $\vec{A}(P)$, vom spune că în D am definit un *câmp vectorial.*

Un câmp scalar, φ (sau vectorial, $\vec{A}$) se numeşte *staționar* dacă φ (respectiv $\vec{A}$) nu depind explicit de timp. În caz contrar, câmpul se numeşte *nestaționar.*

În problemele de electrodinamnică se întâlnesc frecvent următoarele **tipuri de integrale:**

a) *Integrala curbilinie*: $\int_{P_1}^{P_2} \vec{a} \cdot d\vec{s}$, de-a lungul unei curbe, C, luată între punctele P_1 şi P_2, în care $\vec{a}$ este un vector cu punctul de aplicaţie pe curbă, iar $d\vec{s}$ este un element vectorizat al curbei C. Această integrală se numeşte *circulația* vectorului $\vec{a}$ de-a lungul curbei C, de la P_1 la P_2. Dacă C este o curbă închisă, circulația se notează astfel: $\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{s}$.

b) *Integrala dublă*: $\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS$, unde $\vec{a}$ este un vector cu punctul de aplicaţie pe suprafaţa $\vec{S}$, $d\vec{S}$ este un element de suprafaţă vectorizat, iar $\vec{n}$ este versorul normalei exterioare la dS. Integrala se numeşte *flux* al vectorului $\vec{a}$ prin suprafaţa S. Dacă S este o suprafaţă închisă, integrala se notează astfel: $\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$.

BCU CLUJ / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

c) *Integrala triplă*: $\int_D \vec{a}\, d\tau$, unde domeniul $D \subset E_3$ are volumul V, $d\tau$ este un element de volum, iar vectorul $\vec{a}$ are originea într-un punct oarecare din D.

Definițiile de mai sus rămân evident valabile, cu precizările de rigoare, dacă $\vec{a}$ este un *câmp vectorial.*

B.3.2. Operatori vectoriali diferențiali de ordinul întâi

i) *Gradientul.* Fie câmpul scalar $\varphi(\vec{r})$, unde $\varphi(\vec{r})$ este o funcție de clasă C^1 în $D \subset E_3$. Câmpul vectorial

$$\vec{A} = grad\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\vec{u}_i = \nabla\varphi \quad (i = 1,2,3), \tag{B.21}$$

se numește *gradientul* câmpului scalar $\varphi(\vec{r})$. Câmpul vectorial $\vec{A}$ definit prin (B.21) se numește *conservativ.*

Suprafețe echipotențiale. Fie suprafața fixă

$$\varphi(x, y, z) = C\,(= const.). \tag{B.22}$$

Din $d\varphi = grad\,\varphi \cdot d\vec{r} = 0$ deducem atunci că în fiecare punct al suprafeței (B.22) vectorul $\nabla\varphi$ are direcția normalei la suprafață. Dând valori constantei C, obținem o familie de suprafețe numite *suprafețe echipotențiale* sau *suprafețe de nivel.*

Linii de câmp. Fie câmpul vectorial staționar $\vec{A}(\vec{r})$ și o curbă C dată parametric prin ecuațiile: $x_i = x_i(\vec{s})$, $(i = 1,2,3)$. Dacă în fiecare punct al curbei C câmpul $\vec{A}(\vec{r})$ este tangent la aceasta, curba se numește *linie a câmpului vectorial* $\vec{A}(\vec{r})$. Ecuațiile diferențiale ale liniilor de câmp se deduc din relația: $\vec{A} \times d\vec{s} = 0$, unde $d\vec{s}$ este un element vectorizat din linia de câmp.

Derivată direcțională. Să proiectăm vectorul $\nabla\varphi$ pe direcția definită de versorul $\vec{u}$. Întrucât $d\vec{r} = \vec{u}\,|d\vec{r}| = \vec{u}\,ds$, unde ds este un element de curbă pe direcția $\vec{u}$, avem

$$(grad\,\varphi)\cdot\vec{u} = (grad\,\varphi)_u = \frac{d\varphi}{ds}. \tag{B.23}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

În particular, dacă $\vec{u}$ coincide cu versorul $\vec{n}$ al normalei exterioare la suprafața (B.22), avem

$$(grad\,\varphi)\cdot\vec{n}=\frac{d\varphi}{dn}\geq 0, \tag{B.24}$$

deci gradientul este orientat după normala la suprafața echipotențială și are ca sens pozitiv sensul creșterii câmpului.

ii) *Divergența.* Aplicând scalar operatorul $\nabla=\vec{u}_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ câmpului vectorial $\vec{A}(\vec{r})$, obținem *divergența lui* $\vec{A}(\vec{r})$

$$div\,\vec{A}(\vec{r})=\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\equiv\partial_i A_i\equiv A_{i,i}\quad(i=1,2,3). \tag{B.25}$$

Un câmp vectorial, $\vec{A}(\vec{r})$, care se bucură de proprietatea

$$div\,\vec{A}\equiv\nabla\cdot\vec{A}=0 \tag{B.26}$$

se numește *câmp fără surse* sau *câmp solenoidal.* Liniile unui astfel de câmp sunt curbe închise.

iii) *Rotorul.* Prin "*rotor*" al unui cîmp vectorial $\vec{A}(\vec{r})$, înțelegem câmpul vectorial $\vec{B}$, obținut din $\vec{A}$ prin operația $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$. Analitic, rotorul vectorului $\vec{A}$ se exprimă prin

$$rot\,\vec{A}\equiv\nabla\times\vec{A}=\vec{u}_i\,\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k\,;\ \left(rot\,\vec{A}\right)_s=\varepsilon_{sjk}\partial_j A_k. \tag{B.27}$$

Un câmp vectorial, $\vec{A}$, care se bucură de proprietatea

$$rot\,\vec{A}\equiv\nabla\times\vec{A}=0 \tag{B.28}$$

se numește *câmp irotațional* sau *fără vârtejuri* sau, încă, *neturbionar.*

B.3.3. Teoreme fundamentale

Fie un domeniu D mărginit de suprafața S, și un câmp vectorial $\vec{A}$ de clasă C^1 în D și C^0 în $\bar{D}$ (domeniul format din totalitatea punctelor lui D împreună cu cele ale suprafeței S). Se arată că

$$\oint_S\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS=\int_D div\,\vec{A}\,d\tau, \tag{B.29}$$

formulă ce exprimă matematic *teorema Green-Gauss-Ostrogradski.* Aici $\vec{n}$ este versorul normalei exterioare la S.

BCU IAȘI - CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Să contractăm suprafaţa S, astfel încât domeniul D să devină din ce în ce mai mic. La limită, avem

$$div\,\vec{A} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{1}{\Delta\tau} \oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS\,, \tag{B.30}$$

relaţie ce poate fi considerată ca definiţie a divergenţei unui câmp vectorial într-un punct. Ea este utilă prin aceea că exprimă divergenţa *independent* de sistemul de coordonate (este o relaţie intrinsecă). Dacă $div\,\vec{A} > 0$, spunem că în acel punct avem o *sursă pozitivă* (sau *izvor*), iar dacă $div\,\vec{A} < 0$, se spune că avem o *sursă negativă* (sau *puţ*).

Fie acum o suprafaţă S, care se sprijină pe conturul C şi un câmp vectorial $\vec{A}$, de clasă C^1. În acest caz este valabilă relaţia

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(rot\,\vec{A}\right)\cdot\vec{n}\,dS\,, \tag{B.31}$$

numită *teorema Stokes-Ampère*. Admiţând că $\vec{n}$ este versorul normalei exterioare la $\vec{S}$, sensul de parcurs pe C este dat de regula burghiului drept. În particular, dacă $\vec{A} = grad\,\varphi$, avem

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = \oint_C d\varphi = 0\,, \tag{B.32}$$

căci integrala dintr-o diferenţială totală, pe un contur închis, este nulă.

Contractând elementul de suprafaţă până ce acesta devine suficient de mic pentru ca $rot\,\vec{A}$ să nu varieze apreciabil în interiorul său, avem (la limită)

$$rot_n\vec{A} = \vec{n}\cdot rot\,\vec{A} = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}\,, \tag{B.33}$$

care poate servi ca relaţie intrinsecă de definiţie a rotorului.

B.3.4. Unele consecinţe ale teoremelor Green-Gauss-Ostrogradski şi Stokes-Ampère

Fie $\vec{A} = \vec{e}\,\varphi$, unde φ este un câmp scalar de clasă C^1, iar $\vec{e}$ un vector constant. Din (B.29) deducem atunci

$$\oint_S \varphi\, d\vec{S} = \int_D grad\,\varphi\, d\tau\,, \tag{B.34}$$

iar din (B.31),

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\oint_C \varphi \, d\vec{l} = \int_S (\vec{n} \times grad\varphi) \, dS \,. \tag{B.35}$$

Dacă în (B.29) alegem $\vec{A} = \vec{e} \times \vec{B}$, unde $\vec{e}$ este un vector constant, iar $\vec{B}$ un câmp vectorial de clasă C^1 în D, obținem relația

$$\oint_S \vec{n} \times \vec{B} \, dS = \int_D rot\, \vec{B} \, d\tau \,. \tag{B.36}$$

Fie acum câmpul vectorial $\vec{A}$ de forma: $\vec{A} = \psi \; grad\varphi$, unde $\psi \in C^1(D)$ şi $\varphi \in C^2(D)$. Din (B.29) avem atunci

$$\int_D (grad\psi \cdot grad\varphi + \psi \, \Delta\varphi) \, d\tau = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \,, \tag{B.37}$$

în care Δ este *operatorul lui Laplace* (laplacean). Schimbând între ele funcțiile φ şi ψ în (B.37), apoi scăzând rezultatul din (B.37), avem

$$\int_D (\psi \Delta\varphi - \varphi \Delta\psi) \, d\tau = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \,, \tag{B.38}$$

unde, de data aceasta $(\varphi, \psi) \in C^2(D) \cup C^1(\overline{D})$. Relațiile (B.37) şi (B.38) sunt cunoscute sub numele de *identitățile lui Green.*

B.3.5. Formule utile

Câmpurile scalare şi vectoriale asupra cărora se aplică operatorii *grad*, *div* şi *rot* intervin, uneori, ca produse de funcții. Alteori, întâlnim operații repetate [de exemplu: $div(grad\,\varphi)$, $grad(rot\,\vec{A})$ etc.]. În cele ce urmează dăm câteva formule utilizate în mod curent în electrodinamică.

$$grad(\varphi\,\psi) = \varphi \; grad\psi + \psi \; grad\varphi \,. \tag{B.39}$$

$$div(\varphi\vec{A}) = \varphi \; div\,\vec{A} + \vec{A} \cdot (grad\,\varphi) \,. \tag{B.40}$$

$$rot(\varphi\vec{A}) = \varphi(rot\,\vec{A}) + (grad\,\varphi) \times \vec{A} \,. \tag{B.41}$$

$$div(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (rot\,\vec{A}) - \vec{A} \cdot (rot\,\vec{B}) \,. \tag{B.42}$$

$$grad(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (rot\,\vec{B}) + \vec{B} \times (rot\,\vec{A}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} \,. \tag{B.43}$$

$$rot(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \; div\,\vec{B} - \vec{B} \; div\,\vec{A} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} \,. \tag{B.44}$$

$$div(rot\,\vec{A}) = 0 \,. \tag{B.45}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$rot\left(grad\,\varphi\right)=0. \tag{B.46}$$

$$div\left(grad\,\varphi\right)=\Delta\varphi;\ \Delta\bullet\equiv\frac{\partial^2\bullet}{\partial x_i\partial x_i}\equiv\partial_i\partial_i\bullet\equiv\left(\bullet\right)_{,ii}. \tag{B.47}$$

$$rot\left(rot\,\vec{A}\right)=grad\left(div\,\vec{A}\right)-\Delta\vec{A}. \tag{B.48}$$

Fie $\vec{r}$ vectorul de poziție al unui punct P, în raport cu originea reperului cartezian ortogonal $Oxyz$. Avem

$$\begin{cases} grad\,r=\dfrac{\vec{r}}{r}=\vec{u}_r;\ grad\,r=1;\ div\,\vec{r}=3; \\ rot\,\vec{r}=0;\ \Delta\left(\dfrac{1}{r}\right)_{r\neq 0}=0;\ \nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)=-\dfrac{\vec{r}}{r^3}. \end{cases} \tag{B.49}$$

Dacă $\vec{A}$ este un vector constant, din (B.42)÷(B.44) și (B.49) deducem

$$div\left(\vec{A}\times\vec{r}\right)=0; \tag{B.50}$$

$$grad\left(\vec{A}\cdot\vec{r}\right)=\vec{A}; \tag{B.51}$$

$$rot\left(\vec{A}\times\vec{r}\right)=2\vec{A}. \tag{B.52}$$

Date fiind câmpurile $\varphi(r)$ și $\vec{A}(r)$, unde $r=\left|\vec{r}\right|$, se poate dovedi valabilitatea următoarelor relații:

$$\begin{cases} grad\,\varphi(r)=\vec{u}_r\,\varphi'; \\ div\,\vec{A}(r)=\vec{u}_r\cdot\vec{A}'; \\ rot\,\vec{A}(r)=\vec{u}_r\times\vec{A}', \end{cases} \tag{B.53}$$

unde $\varphi'=\dfrac{d\varphi}{dr}$, $\vec{A}'=\dfrac{d\vec{A}}{dr}$ și $\vec{u}_r=\dfrac{\vec{r}}{r}$.

§ B.4. Tensori cartezieni de ordinul al doilea

Un sistem ordonat de trei mărimi, $A_i\ (i=1,2,3)$, care la schimbarea bazei (coordonatelor) se transformă după legea [vezi (B.13)]

$$A_i'=a_{ik}A_k\ \ (i,k=1,2,3), \tag{B.54}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

în care cosinusurile directoare, a_{ik}, satisfac condiția de ortogonalitate (B.15), formează *un tensor ortogonal afin de ordinul întâi*, sau *vector ortogonal afin.*

Un sistem de $3^2 = 9$ cantități T_{ik} $(i,k = 1,2,3)$, care la schimbarea bazei, se transformă ca și produsul $A_i B_k$, adică după legea

$$T'_{ik} = a_{ij} a_{km} T_{jm}, \tag{B.55}$$

poartă numele de *tensor ortogonal afin de ordinul al doilea.* Dacă în (B.55) facem $i = k$ și ținem seama de condiția de ortogonalitate (B.15), avem

$$T'_{ii} = a_{ij} a_{im} T_{jm} = \delta_{jm} T_{jm} = T_{mm}. \tag{B.56}$$

Suma $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$ se numește *trasa* sau *urma* tensorului T_{ik}; uneori se întâlnește denumirea de *spur* (din limba germană). Din (B.56) rezultă că trasa unui tensor ortogonal afin de ordinul al doilea este invariantă la o schimbare a bazei, de forma (B.13).

Toate definițiile și proprietățile tensorilor din Anexa A rămân, evident, valabile. Fie, în acest sens, tensorul antisimetric A_{ik}, și să notăm cele trei componente independente ale acestuia prin

$$A_{12} \equiv A_3;\ A_{23} \equiv A_1;\ A_{31} \equiv A_2,$$

sau, condensat,

$$A_{ij} = \varepsilon_{ijk} A_k;\ A_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} A_{jk}\ \ (i,j,k = 1,2,3). \tag{B.57}$$

Sistemul ordonat de cantități (mărimi, numere) A_i formează un pseudovector, numit *vector asociat* tensorului antisimetric A_{ik}. O astfel de situație întâlnim, de pildă, la produsul vectorial a doi vectori. Ținând seama de (A.45), avem

$$c_i = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} c_{jk}, \tag{B.58}$$

unde, prin c_{jk} am notat tensorul antisimetric

$$c_{jk} = a_j b_k - a_k b_j \tag{B.59}$$

și am ținut seama că produsul sumat după j și k dintre tensorul simetric $\frac{1}{2}(a_j b_k + a_k b_j)$ și pseudotensorul complet antisimetric ε_{ijk} este nul:

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}\left(a_j b_k + a_k b_j\right) = 0. \tag{B.60}$$

Aşadar, vectorul asociat unui tensor antisimetric de ordinul al doilea este un pseudovector. Tensorul antisimetric A_{ik} şi pseudovecorul $A_i = (1/2)\times\ \varepsilon_{ijk}A_{jk}$ se numesc *duali* unul faţă de celălalt.

§ B.5. Tensori cartezieni de ordin superior

Un tensor (T) de ordinul p în E_3 este un sistem de 3^p componente care, la o transformare ortogonală de coordonate, se transformă după legea

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_p j_p} T_{j_1 j_2 \ldots j_p} \quad \left(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_p\ ;\ j_1, j_2,\ \ldots,\ j_p = 1,2,3\right). \tag{B.61}$$

Un pseudotensor $\left(T^*\right)$ de ordinul p în E_3 este un sistem de 3^p cantităţi care, la o transformare ortogonală de coordonate, se transformă după legea

$$T^{*'}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \left[\det\left(a_{ik}\right)\right] a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_p j_p} T^*_{j_1 j_2 \ldots j_p} \quad \left(i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_p;\ j_1, j_2,\ \ldots,\ j_p = \overline{1,3}\right). \tag{B.62}$$

Prin urmare, la o transformare ortogonală proprie $\left[\det\left(a_{ik}\right) = +1\right]$, pseudotensorii se transformă ca şi tensorii, în timp ce la o transformare improprie $\left[\det\left(a_{ik}\right) = -1\right]$ apare o diferenţă de semn. Comparând (B.62) cu (B.19), deducem că simbolul de permutare al lui Levi-Civita, definit prin (B.7), este un pseudotensor. El se numeşte *pseudotensorul unitate complet antisimetric de ordinul al treilea.* La o transformare ortogonală, simbolul lui Levi-Civita se va transforma după legea

$$\varepsilon'_{ijk} = \left[\det\left(a_{ik}\right)\right] a_{il} a_{jm} a_{kn} \varepsilon_{lmn}. \tag{B.63}$$

Utilizând (B.19), avem

$$\varepsilon'_{ijk} = \left[\det\left(a_{ik}\right)\right]^2 \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{ijk}, \tag{B.64}$$

deci, componentele pseudotensorului ε_{ijk} nu depind de alegerea bazei.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ANEXA C

VECTORI ŞI TENSORI ÎN SPAŢIUL MINKOWSKI

§ C.1. Reprezentarea euclidian-complexă

Coordonatele $x, y, z, \tau = ict$ ale unui eveniment în spaţiul Minkowski pot fi considerate ca fiind componentele unui vector numit *cuadrivector* sau *vector cuadridimensional de poziţie*. Notând cu $x_i \ \left(i = \overline{1,4}\right)$, componentele acestui vector, vom alege: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$.

Componentele $x_\alpha \ (\alpha = 1,2,3)$ poartă numele de *componente spaţiale*, iar x_4 - *componenta temporală*. În acest caz, metrica se va scrie astfel

$$-ds^2 = dx_i dx_i = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2, \quad \text{(C.1)}$$

prin urmare, din

$$-ds^2 = g_{ik} dx_i dx_k$$

rezultă că

$$g_{ik} = \delta_{ik}, \quad \text{(C.2)}$$

ceea ce corespunde unui spaţiu pseudoeuclidian cu metrică nedefinită. O astfel de reprezentare a spaţiului Minkowski se numeşte *reprezentare euclidian-complexă.*

La schimbarea sistemului de coordonate, cuadrivectorul x_i se transformă după legea [vezi (B.54)]

$$x_i' = a_{ik} x_k \ \left(i,k = \overline{1,4}\right). \quad \text{(C.3)}$$

Dacă x_i' sunt coordonatele unui eveniment, determinate într-un referenţial S', animat de o mişcare rectilinie şi uniformă, cu viteza V, în direcţia axei Ox, în raport cu referenţialul S $(Ox \equiv O'x')$, atunci a_{ik} sunt elementele *matricei de transformare Lorentz-Einstein*:

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$a_{ik}=\begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & i\frac{V}{c}\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\frac{V}{c}\beta & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \tag{C.4}$$

unde $\beta=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, iar (C.3) constituie reprezentarea sintetică a transformării Lorentz-Einstein

$$x'=\beta(x-Vt);\ y'=y;\ z'=z;\ t'=\beta\left(t-\frac{V}{c^2}x\right). \tag{C.5}$$

Un ansamblu de 4 mărimi A_i $\left(i=\overline{1,4}\right)$ care se transformă ca şi coordonatele, adică după legea

$$A_i'=a_{ik}A_k\ \left(i,k=\overline{1,4}\right), \tag{C.6}$$

formează un *cuadrivector*. În reprezentarea euclidian-complexă, componentele spaţiale, A_α, $(\alpha=1,2,3)$, ale unui cuadrivector sunt *reale*, iar componenta A_4 este *imaginară*.

Un *tensor cuadridimensional* (*cuadritensor*) de ordinul al doilea, T_{ik}, se transformă ca şi produsul A_iB_k, adică după legea

$$T_{ik}'=a_{il}a_{km}T_{lm}\ \left(i,k,l,m=\overline{1,4}\right). \tag{C.7}$$

În acelaşi mod se pot defini cuadritensorii de ordinul trei, patru etc.

În teoria relativităţii, un deosebit interes îl prezintă *pseudocuadritensorul unitate complet antisimetric de ordinul patru,* ε_{iklm}. Acesta se defineşte ca având valoarea +1, −1, sau 0, după cum indicii i,k,l,m sunt permutări pare, impare, sau – respectiv – cu doi indici egali, ale numerelor 1, 2, 3, 4, în această ordine. Cantităţile ε_{iklm} formează un pseudotensor (şi nu un tensor) deoarece la oglindirea unei (sau a trei) coordonate, componentele sale nu-şi schimbă semnul. Se poate verifica direct următoarea proprietate

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\varepsilon_{iklm}\varepsilon_{pqrs}=\begin{vmatrix}\delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} & \delta_{is}\\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} & \delta_{ks}\\ \delta_{lp} & \delta_{lq} & \delta_{lr} & \delta_{ls}\\ \delta_{mp} & \delta_{mq} & \delta_{mr} & \delta_{ms}\end{vmatrix}. \tag{C.8}$$

De aici rezultă, de pildă

$$\begin{cases}\varepsilon_{iklm}\,\varepsilon_{ikpq}=\left(\delta_{lp}\delta_{mq}-\delta_{lq}\delta_{mp}\right)\cdot 2!;\\ \varepsilon_{iklm}\,\varepsilon_{jklm}=\delta_{ij}\cdot 3!=6\,\delta_{ij};\\ \varepsilon_{iklm}\,\varepsilon_{iklm}=4!=24.\end{cases} \tag{C.9}$$

Cu ajutorul pseudotensorului ε_{iklm} putem defini *dualul* unui tensor antisimetric. Dacă A_{ik} este un tensor antisimetric, atunci tensorul A_{ik} şi pseudotensorul $\tilde{A}_{ik}=\frac{1}{2}\varepsilon_{iklm}A_{lm}$ se numesc *duali* unul faţă de altul. În mod analog, $A_{ikl}=\varepsilon_{iklm}A_m$ este un pseudotensor antisimetric de ordinul al treilea, dual vectorului A_i.

În spaţiul cuadridimensional pot exista patru tipuri de varietăţi, prin urmare, sunt posibile patru moduri de integrare; există, deci, patru tipuri de integrale:

1. *Integrala curbilinie*, ce are ca element de integrare elementul de arc dx_i.

2. *Integrala* extinsă la o suprafaţă *bidimensională* (varietate de ordinul doi). În spaţiul E_3, ca element de suprafaţă se utilizează vectorul dS_α, care este dualul tensorului antisimetric $dS_{\alpha\beta}$ [vezi (B.57)], adică

$$d\tilde{S}_\alpha=\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,dS_{\beta\gamma}.$$

Din punct de vedere geometric, dS_α este un vector ortogonal la elementul de suprafaţă şi egal, în modul, cu aria acestui element.

Prin analogie, în spaţiul cuadridimensional se construieşte

$$d\tilde{S}_{ik}=\frac{1}{2}\varepsilon_{iklm}\,dS_{lm}\quad\left(i,k,l,m=\overline{1,4}\right), \tag{C.10}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

adică dualul tensorului dS_{ik}, care, geometric, reprezintă un element de suprafață egal cu dS_{ik} şi ortogonal la acesta.

3. *Integrala* extinsă la o varietate *tridimensională*, varietate numită *hipersuprafață*. În spațiul tridimensional elementul de volum se obține efectuând produsul mixt al celor trei elemente de arc corespunzătoare celor trei curbe de coordonate, care se „întâlnesc" într-un punct. În patru dimensiuni, ca element de hipersuprafață se defineşte tensorul antisimetric dS_{ikl}, alături de dualul acestuia, $d\tilde{S}_i$, prin

$$d\tilde{S}_i = \frac{1}{3!}\varepsilon_{iklm}\, dS_{klm};\ dS_{ijk} = \varepsilon_{ijkl}\, dS_l. \qquad \text{(C.11)}$$

Geometric, cuadrivectorul dS_i este ortogonal la elementul de hipersuprafață şi egal în modul cu aria acestui element. În particular, $dS_4 = dx\,dy\,dz$ este elementul de volum $d\tau$, din spațiul tridimensional, ortogonal la hiperplanul $x_4 = const.$

4. *Integrala* extinsă asupra unui domeniu *cuadridimensional*, de element de volum

$$d\Omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = dS_i dx_i \ \text{(fără sumare)}, \qquad \text{(C.12)}$$

unde elementul de hipersuprafață dS_i este ortogonal la elementul de arc dx_i.

Utilizând aceste noțiuni, putem generaliza în spațiul Minkowski teoremele Green-Gauss-Ostrogradski şi Stokes-Ampère. Apelând la (C.12), putem scrie

$$\int \frac{\partial A_i}{\partial x_i} d\Omega = \int \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dS_l\, dx_l = \oint A_i\, dS_i \ \text{(fără sumare după } l\text{)}, \qquad \text{(C.13)}$$

prin urmare, integrala pe o hipersuprafață închisă poate fi transformată într-o integrală extinsă asupra domeniului cuadridimensional pe care îl mărgineşte, folosind substituția

$$dS_i \rightarrow d\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \left(i = \overline{1,4}\right). \qquad \text{(C.14)}$$

Relația (C.13) exprimă *generalizarea teoremei Green-Gauss-Ostrogradski.*

În mod asemănător, pentru integrala pe o suprafață bidimensională, de element de suprafață $dS_{ik} = dx_i dx_k$, avem

BCU CLUJ CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\int \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dS_{ik} = \int \frac{\partial A_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \oint A_i \, dx_i \,, \tag{C.15}$$

deci, circulaţia luată de-a lungul unei curbe cuadridimensionale închise se transformă într-o integrală pe suprafaţa bidimensională ce se sprijină pe ea, prin substituţia

$$dx_i \rightarrow dS_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k} . \tag{C.16}$$

Efectuând un artificiu simplu în (C.15), mai putem scrie

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) dS_{ik} = \oint A_i \, dx_i \,, \tag{C.17}$$

care exprimă *generalizarea teoremei Stokes-Ampère.*

În mod similar, putem stabili o legătură între integrala extinsă la o suprafaţă bidimensională şi una extinsă la suprafaţa tridimensională ce o înfăşoară. De pildă, dat fiind tensorul antisimetric A_{ik}, avem

$$\int \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} dS_i = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} dS_i + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_i} dS_k \right) = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} dS_i - \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i} dS_k \right).$$

Dacă efectuăm substituţia

$$d\tilde{S}_{ik} \rightarrow dS_i \frac{\partial}{\partial x_k} - dS_k \frac{\partial}{\partial x_i} , \tag{C.18}$$

obţinem relaţia

$$\int \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} dS_k = \frac{1}{2} \int A_{ik} \, d\tilde{S}_{ik} \,. \tag{C.19}$$

§ C.2. Reprezentarea hiperbolică

Dacă alegem drept coordonate ale unui eveniment în spaţiul Minkowski pe: $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ şi $x^4 = ct$, din expresia metricii

$$-ds^2 = dx^i dx_i = g^o_{ik} dx^i dx^k = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 , \tag{C.20}$$

deducem că

$$g^0_{11} = g^0_{22} = g^0_{33} = +1; \;\; g^0_{44} = -1; \;\; g^0_{ik} \, (i \neq k) = 0 . \tag{C.21}$$

Un sistem de coordonate cu aceste valori ale componentelor tensorului metric se numeşte *galilean*, iar reprezentarea corespunzătoare a

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

spațiului Minkowski (ținând seama de cele discutate în text) se numește *reprezentare hiperbolică.*

Din (C.21) rezultă că o asemenea reprezentare presupune distincția între componentele contravariante și cele covariante ale cuadritensorilor. De exemplu, în cazul tensorilor de ordinul întâi (cuadrivectori) [vezi (A.26)] avem

$$A_i = g^0_{ik} A^k \Leftrightarrow \begin{cases} A_\alpha = g^0_{\alpha\alpha} A^\alpha = A^\alpha \ \text{(fără sumare)}; \\ A_4 = g^0_{44} A^4 = -A^4, \end{cases} \tag{C.22}$$

deci, componentele spațiale covariante ale unui cuadrivector coincid cu cele contravariante, iar între componentele temporale covariantă și contravariantă există o diferență de semn.

Pătratul unui cuadrivector se va scrie după legea (C.20) astfel

$$A^i A_i = A^\alpha A_\alpha + A^4 A_4 = A_\alpha A_\alpha - A_4 A_4 = invariant. \tag{C.23}$$

În spațiul Minkowski, componentele contravariante ale unui cuadrivector se vor transforma după legea (A.7), unde matricea transformării, $\overline{X} \equiv \left(\overline{x}^k_i\right)$, este

$$\overline{X} \equiv \left(\overline{x}^k_i\right) = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 & -\frac{V}{c}\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{V}{c}\beta & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}. \tag{C.24}$$

De pildă, în cazul deplasării reperelor având axa Ox comună, relațiile de transformare ale componentelor cuadrivectorului contravariant A^i vor fi

$$A'^1 = \beta\left(A^1 - \frac{V}{c}A^4\right);\ A'^2 = A^2;\ A'^3 = A^3;\ A'^4 = \beta\left(-\frac{V}{c}A^1 + A^4\right), \tag{C25}$$

iar cele ale cuadrivectorului covariant

$$A'_1 = \beta\left(A_1 + \frac{V}{c}A_4\right);\ A'_2 = A_2;\ A'_3 = A_3;\ A'_4 = \beta\left(\frac{V}{c}A_1 + A_4\right). \tag{C.26}$$

Ținând seama de (A.29) și (C.21), putem scrie că

BCU IAȘI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$g^0_{ik} = g^{0\,ik}, \ \left(i,k=\overline{1,4}\right). \tag{C.27}$$

În coordonate galileene, atât componentele spaţiale, A_α $(\alpha=1,2,3)$, cât şi cea temporală, A_4, ale unui cuadrivector covariant A_i sunt *reale*. Aceeaşi proprietate o au şi componentele contravariante A^i.

Să trecem în revistă cantităţile tensoriale definite în paragraful precedent, scriindu-le – de data aceasta – în reprezentarea hiperbolică.

Definim pseudotensorul unitate contravariant, ε^{iklm}, prin

$$\varepsilon^{1234} = +1. \tag{C.28}$$

De aici rezultă că

$$\varepsilon_{iklm} = g_{is}\, g_{kt}\, g_{lu}\, g_{mv}\, \varepsilon^{stuv} = -\varepsilon^{iklm}, \tag{C.29}$$

căci unul dintre cei patru tensori metrici este -1, iar fiecare dintre ceilalţi trei are valoarea $+1$, oricare ar fi ordinea celor patru indici *diferiţi* i,k,l,m. Putem scrie atunci

$$\varepsilon^{iklm}\varepsilon_{prst} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s & \delta^l_t \\ \delta^m_p & \delta^m_r & \delta^m_s & \delta^m_t \end{vmatrix}. \tag{C.30}$$

Dacă sumăm după unul, doi, trei sau patru indici, obţinem relaţii asemănătoare celor date de (C.9), adică

$$\begin{cases} \varepsilon^{iklm}\varepsilon_{prlm} = -\delta^{ik}_{pr}\cdot 2! = -2\left(\delta^i_p\delta^k_r - \delta^i_r\delta^k_p\right); \\ \varepsilon^{iklm}\varepsilon_{pklm} = -\delta^i_p\cdot 3! = -6\,\delta^i_p; \\ \varepsilon^{iklm}\varepsilon_{iklm} = -4! = -24. \end{cases} \tag{C.31}$$

Dacă A^{ik} este un tensor antisimetric, dualul său va fi pseudotensorul $\tilde{A}^{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon^{iklm}A_{lm}$. Produsul $\tilde{A}^{ik}A_{ik}$ este un pseudoscalar.

În mod asemănător, pseudotensorul antisimetric $\varepsilon^{iklm}A_m$ este dualul vectorului A^i etc.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Simbolul de derivare parțială în raport cu coordonatele x^i, adică $\frac{\partial}{\partial x^i}$, este un operator cuadrivector covariant, în timp ce $\frac{\partial}{\partial x_i}$ este un operator cuadrivector contravariant. Uneori se utilizează notațiile: $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ și $\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Să ne oprim și aici asupra celor patru moduri de integrare, corespunzătoare celor patru tipuri de varietăți ce pot exista în spațiul Minkowski.

1. *Integrala curbilinie* cu elementul de arc dx^i.

2. *Integrala* extinsă la o suprafață *bidimensională*, cu elementul de suprafață

$$d\tilde{S}^{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon^{iklm}\, dS_{lm}, \tag{C.32}$$

care, geometric, reprezintă un element de suprafață ortogonal la (și egal cu) dS_{ik}.

3. *Integrala* extinsă la o hipersuprafață (varietate *tridimensională*), de element de suprafață

$$d\tilde{S}^i = -\frac{1}{3!}\varepsilon^{iklm}\, dS_{klm};\ dS_{klm} = \varepsilon_{iklm}\, dS^i, \tag{C.33}$$

de pildă,

$$d\tilde{S}^1 = -dS_{234} = dS^{234};\ d\tilde{S}^4 = dS^{123}\ etc. \tag{C.34}$$

Cuadrivectorul $d\tilde{S}^i$ are modulul egal cu aria elementului de hipersuprafață și este ortogonal la acesta.

4. *Integrala* extinsă la un domeniu *cuadridimensional*, având ca element de integrare scalarul

$$d\Omega = c\,d\tau\,dt = dx^1dx^2dx^3dx^4 = dx^i\, dS_i \quad (\text{fără sumare}), \tag{C.35}$$

în care, elementul de arc dx^i și cel de hipersuprafață dS_i sunt ortogonali.

Relația ce exprimă teorema generalizată Green-Gauss-Ostrogradski se va scrie

$$\oint A^i\, dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega, \tag{C.36}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

iar teorema generalizată Stokes-Ampère va avea forma

$$\oint A_i\, dx^i = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) dS^{ik}\,. \qquad \text{(C.37)}$$

În fine, relaţia dintre integrala pe o suprafaţă bidimensională a unui cuadritensor antisimetric, A^{ik}, şi cea extinsă la hipersuprafaţa tridimensională care o mărgineşte se va scrie sub forma

$$\frac{1}{2}\int A^{ik}\, d\tilde{S}_{ik} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} dS_i - \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^i} dS_k\right) = \int \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} dS_i\,. \qquad \text{(C.38)}$$

§ C.3. Reprezentarea în coordonate curbilinii

În studiul relativist al câmpului gravitaţional, studiu ce se efectuează – după cum ştim – pe spaţii curbe, apare problema definirii unor mărimi şi operatori în aceste spaţii. În spaţiile curbe, cuadrivectorii şi cuadritensorii sunt definiţi la fel ca în Anexa A, cu deosebirea că aici nu există coordonate galileene, deci componentele tensorului metric, g_{ik}, vor depinde întotdeauna de coordonatele x^i.

Pentru început, să scriem legea de transformare a componentelor pseudotensorului unitate complet antisimetric de ordinul patru, ε_{iklm}, la trecerea de la un sistem de coordonate galileene, x^i, la un sistem de coordonate curbilinii arbitrare, x'^i. Notând transformarea de coordonate prin: $x'^i = x'^i(x^k)$ şi utilizând regula generală de transformare a tensorilor, vom avea

$$\varepsilon'_{iklm} = \frac{\partial x^s}{\partial x'^i}\frac{\partial x^t}{\partial x'^k}\frac{\partial x^u}{\partial x'^l}\frac{\partial x^v}{\partial x'^m}\varepsilon_{stuv}\,, \qquad \text{(C.39)}$$

unde ε_{stuv} este definit în coordonate galileene x^i, iar ε'_{iklm} în coordonate curbilinii x'^i.

Dacă A_i^k $\left(i,k=\overline{1,4}\right)$ este un tensor mixt oarecare, se verifică prin încercări directe relaţia

$$A_i^{\ s} A_k^{\ t} A_l^{\ u} A_m^{\ v}\, \varepsilon_{stuv} = A\, \varepsilon_{iklm}\,, \qquad \text{(C.40)}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $A=\det\left(A_i^{\,k}\right)$. Relaţia (C.40) este o generalizare în patru dimensiuni a formulei (B.19). Putem scrie atunci

$$\varepsilon'_{iklm}=\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\right)\varepsilon_{iklm}=\frac{1}{J}\varepsilon_{iklm}, \tag{C.41}$$

unde

$$J=\frac{\partial(x'^1,\,x'^2,\,x'^3,\,x'^4)}{\partial(x^1,\,x^2,\,x^3,\,x^4)} \tag{C.42}$$

este determinantul funcţional al transformării $x^i\to x'^i$.

Să exprimăm jacobianul J în funcţie de tensorul metric $g_{ik}(x^m)$. Utilizând legea de transformare cunoscută, avem

$$g'_{ik}=\frac{\partial x^l}{\partial x'^i}\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}g^0_{lm},$$

de unde, dacă notăm $\det\left(g'_{ik}\right)\equiv g$ şi ne amintim că $\det\left(g^0_{ik}\right)=-1$, deducem că $g=-1/J^2$, sau

$$J=\frac{1}{\sqrt{-g}}. \tag{C.43}$$

În treacăt, menţionăm că, dacă în locul coordonatelor galileene am fi avut coordonate carteziene, atunci am fi găsit că $J=1/\sqrt{g}$, căci $\det\left(\delta_{ik}\right)=1$. Notând $\varepsilon'_{iklm}=\delta_{iklm}$, găsim aşadar,

$$\delta_{iklm}=\sqrt{-g}\,\varepsilon_{iklm}. \tag{C.44}$$

În mod asemănător, găsim legea de transformare a componentelor contravariante, ε^{iklm}:

$$\varepsilon'^{iklm}=\frac{\partial x'^i}{\partial x^s}\frac{\partial x'^k}{\partial x^t}\frac{\partial x'^l}{\partial x^u}\frac{\partial x'^m}{\partial x^v}\varepsilon^{stuv}=J\,\varepsilon^{iklm},$$

adică

$$\delta^{iklm}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\varepsilon^{iklm}, \tag{C.45}$$

unde am notat: $\varepsilon'^{iklm}=\delta^{iklm}$. Înlocuind (C.44) şi (C.45) în (C.29), găsim

$$\delta_{iklm}=g\,\delta^{iklm}. \tag{C.46}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Dacă $g=-1$, regăsim cazul coordonatelor galileene.

Să scriem, în continuare, legea de transformare a elementului de volum cuadridimensional la trecerea $x^i \to x'^i$. În coordonate galileene, $d\Omega = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4$ este un invariant (scalar). În noile coordonate, x'^i, vom avea

$$d\Omega = \frac{1}{J} d\Omega' = \sqrt{-g}\, d\Omega', \tag{C.47}$$

deci în coordonatele curbilinii x'^i, *nu* $d\Omega'$, ci $\sqrt{-g}\, d\Omega'$ se va comporta ca un invariant la integrarea pe un domeniu cuadridimensional.

Dacă în urma integrării pe Ω a cantităţii $\sqrt{-g}\ \varphi$, unde φ este un scalar, obţinem un invariant, cantitatea $\sqrt{-g}\ \varphi$ se numeşte *densitate scalară.* În acelaşi mod se definesc noţiunile de *densitate vectorială* $\sqrt{-g}A^i$ şi *densitate tensorială,* $\sqrt{-g}T^{ik}$ (prin integrarea pe domeniul Ω rezultă un vector, respectiv un tensor).

Pentru a defini elementul de arie al unei hipersuprafeţe tridimensionale dS_i, în coordonate curbilinii, vom scrie

$$\sqrt{-g}\, dS_i = -\frac{1}{3!}\varepsilon_{iklm}\sqrt{-g}\, dS^{klm} = -\frac{1}{6}\delta_{iklm}\, dS^{klm}. \tag{C.48}$$

În mod asemănător, elementul de suprafaţă bidimensională $d\tilde{S}_{ik}$ se va scrie sub forma

$$\sqrt{-g}\, d\tilde{S}_{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon_{iklm}\sqrt{-g}\, dS^{lm} = \frac{1}{2}\delta_{iklm}\, dS^{lm}. \tag{C.49}$$

Aplicaţie: *Cuadridivergenţe în coordonate curbilinii*

După cum ştim, în scrierea tensorială a multor relaţii stabilite în cadrul relativităţii restrânse apar cuadridivergenţe vectoriale sau tensoriale, care se exprimă cu ajutorul derivatelor obişnuite. Dacă ţinem însă seama de prezenţa gravitaţiei, deci de curbura spaţiului, în locul derivatelor obişnuite trebuiesc utilizate *derivatele covariante.* În cele ce urmează ne propunem să scriem, în coordonate curbilinii, cuadridivergenţa unui vector şi cea a unui tensor, precum şi alţi operatori uzuali.

BCU BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ LIBRARY

Să calculăm, în acest scop, Γ^l_{kl}, obținut din coeficientul de conexiune Γ^i_{kl} prin operația de contracție (n.b. Γ^i_{kl} nu formează un tensor). Avem, în prealabil

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\sqrt{-g}}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k}. \tag{C.50}$$

Dar

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{14} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{41} & \cdots & g_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^k} & \cdots & \frac{\partial g_{14}}{\partial x^k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ g_{41} & \cdots & g_{44} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{14} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{41}}{\partial x^k} & \cdots & \frac{\partial g_{44}}{\partial x^k} \end{vmatrix} = \tag{C.51}$$

$$\frac{\partial g_{1i}}{\partial x^k}G_{1i} + \ldots + \frac{\partial g_{4i}}{\partial x^k}G_{4i} = \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}G_{li},$$

unde G_{li} este complementul algebric al elementului g_{li} din determinantul g. Utilizând (A.29), mai putem scrie

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\right) = \frac{\sqrt{-g}}{2}g^{li}g_{li,k}$$

de unde

$$\frac{1}{2}g^{li}g_{li,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\right). \tag{C.52}$$

Pe de altă parte, dacă în (vezi textul)

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{ij}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}\right)$$

punem $i = l$, avem

$$\Gamma^l_{kl} = \frac{1}{2}g^{lj}g_{lj,k} + \frac{1}{2}g^{lj}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j}\right). \tag{C.53}$$

Ultimul termen din membrul drept este nul, deoarece parantaza este o expresie antisimetrică în indicii j şi l, iar g^{jl} este simetric în aceiaşi indici. Din (C.52) şi (C.53) rezultă atunci

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\Gamma^l_{kl} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\right). \tag{C.54}$$

Cu ajutorul acestei formule auxiliare vom scrie operatorii *divergenţă, gradient, operatorul lui D'Alembert* şi *rotorul* în coordonate curbilinii x^i.

Divergenţa. Fie vectorul contravariant A^k. Derivata sa covariantă este

$$\nabla_i A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{il} A^l. \tag{C.55}$$

Dacă facem $k = i$ şi ţinem seama de (C.54), avem

$$\nabla_i A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{il} A^l = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g} A^l\right),$$

sau, dacă schimbăm indicele de sumare în ultimul termen din membrul drept,

$$A^i_{;i} = \nabla_i A^i = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g} A^i\right), \tag{C.56}$$

care este cuadridivergenţa covariantă a vectorului A^i. Întrucât $A^i_{;i}$ este un invariant, iar $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ este un vector covariant, rezultă că $\sqrt{-g} A^i$ este o *densitate vectorială.* Se observă că anularea cuadridivergenţei covariante a lui A^i are loc odată cu anularea cuadridivergenţei obişnuite a densităţii vectoriale $\sqrt{-g} A^i$.

Fie acum tensorul contravariant A^{il}. Derivata sa covariantă este

$$\nabla_k A^{il} = \frac{\partial A^{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{mk} A^{im} + \Gamma^i_{mk} A^{ml}. \tag{C.57}$$

Punând $l = k$ şi având în vedere (C.54), putem scrie

$$\nabla_k A^{ik} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^k_{mk} A^{im} + \Gamma^i_{mk} A^{mk} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g}\right) A^{ik} + \Gamma^i_{mk} A^{mk},$$

unde, în cel de-al doilea termen am schimbat în mod convenabil indicele de sumare. Prin urmare,

$$\nabla_k A^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{-g} A^{ik}\right) + \Gamma^i_{mk} A^{mk}, \tag{C.58}$$

BCU IAŞI CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

relație ce exprimă cuadridivergența covariantă a tensorului A^{ik}.

Dacă tensorul A^{ik} este antisimetric și ne amintim că Γ^{i}_{mk} este simetric în indicii m și k, ultimul termen din (C.58) se anulează și atunci rezultă

$$A^{ik}_{;k} = \nabla_k A^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{-g} A^{ik} \right). \tag{C.59}$$

Gradientul. Fie funcția scalară Φ. Derivata sa covariantă se reduce, evident, la cea obișnuită, care este un cuadrivector covariant:

$$\nabla_k \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} = A_k . \tag{C.60}$$

Componentele contravariante ale lui A_k sunt

$$A^i = g^{ik} A_k = g^{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}. \tag{C.61}$$

Înlocuind (C.61) în (C.56), obținem *operatorul lui D'Alembert (dalembertianul)* aplicat lui Φ

$$\nabla_i A^i = \Box \Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{-g}\, g^{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial x^k} \right). \tag{C.62}$$

Aceasta este cea mai directă cale de scriere a operatorului lui D'Alembert (respectiv a operatorului lui Laplace – laplaceanul – dacă $i \to \alpha = 1,2,3$) în orice sistem de coordonate (vezi Anexa D).

Rotorul. Fie cuadrivectorul covariant A_k și, cu ajutorul lui, să formăm cuadritensorul covariant antisimetric

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} .$$

Dar

$$\nabla_i A_k - \nabla_k A_i = \left(A_{k,i} - \Gamma^{l}_{ik} A_l \right) - \left(A_{i,k} - \Gamma^{l}_{ki} A_l \right),$$

prin urmare,

$$F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = A_{k,i} - A_{i,k} . \tag{C.63}$$

Cantitățile (C.63) formează un *rotor cuadridimensional*, generalizând noțiunea de *rotor* întâlnită în cazul coordonatelor carteziene x, y, z. După cum rezultă din (C.63), componentele rotorului nu depind de metrica spațiului.

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ANEXA D

COORDONATE CURBILINII ÎN SPAȚIUL FIZIC

Fie $\vec{r}$ vectorul de poziție la unui punct P și x^{α} $(\alpha=1,2,3)$ coordonatele carteziene ale acestuia. Să admitem că există trei parametri reali independenți, x'^{α}, astfel ca

$$x^{\alpha}=x^{\alpha}\left(x'^{\beta}\right)\ (\alpha,\beta=1,2,3). \tag{D.1}$$

Pentru ca transformarea (D.1) să fie local reversibilă, adică pentru a fi adevărată și transformarea

$$x'^{\alpha}=x'^{\alpha}\left(x^{\beta}\right)\ (\alpha,\beta=1,2,3) \tag{D.2}$$

este necesar ca

$$J=\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(x'^1,x'^2,x'^3)}\neq 0\,. \tag{D.3}$$

Dacă fixăm valorile a doi dintre parametrii x'^{α}, de pildă x'^{2} și x'^{3}, obținem curba de coordonate $x'^{1}=$ variabil. În același mod obținem curbele $x'^{2}=$ var. și $x'^{3}=$ var. Astfel, prin fiecare punct din spațiu trec trei curbe de coordonate x'^{α}. Parametrii x'^{α} se numesc *coordonate curbilinii* sau *generale* ale punctului P.

Dacă în P (sau în orice alt punct) vectorii $\vec{e}_{\alpha}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x'^{\alpha}}\ (\alpha=1,2,3)$, tangenți celor trei curbe de coordonate, formează un triedru ortogonal drept, atunci curbele x'^{1}, x'^{2}, x'^{3} formează un *sistem de coordonate curbilinii ortogonale.*

Elementele de arc, de arie și de volum în coordonate curbilinii

O deplasare elementară, $d\vec{r}$, a punctului P se va scrie

$$d\vec{r}=\frac{\partial\vec{r}}{\partial x'^{\alpha}}dx'^{\alpha}=\vec{e}_{\alpha}\,dx'^{\alpha}\,. \tag{D.4}$$

Condiția (D.3) exprimă, între altele, faptul că vectorii $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ și $\vec{e}_3$ sunt *liniar independenți*, deci formează *o bază*. Într-adevăr,

BUJIAS CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial x'^1},\frac{\partial\vec{r}}{\partial x'^2},\frac{\partial\vec{r}}{\partial x'^3}\right)=J\neq 0.$$

Pătratul elementului de arc (metrica spațiului) este

$$ds^2=|d\vec{r}|^2=d\vec{r}\cdot d\vec{r}=\left(\vec{e}_\alpha\,dx'^\alpha\right)\cdot\left(\vec{e}_\beta\,dx'^\beta\right)=g_{\alpha\beta}\,dx'^\alpha\,dx'^\beta, \qquad (D.5)$$

unde $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta=1,2,3)$ este tensorul metric fundamental covariant.

Dacă fixăm pe x'^2 şi x'^3 şi variem numai pe x'^1, obținem mărimea elementului de arc pe curba de coordonate $x'^1=\text{var.}$: $(d_1s)^2=g_{11}\left(dx'^1\right)^2$, adică, $(d_1s)=\sqrt{g_{11}}\left(dx'^1\right)$. În mod similar, obținem încă două relații. Aşadar,

$$\begin{cases}(d_1s)=\sqrt{g_{11}}\left(dx'^1\right);\\ (d_2s)=\sqrt{g_{22}}\left(dx'^2\right);\\ (d_3s)=\sqrt{g_{33}}\left(dx'^3\right).\end{cases} \qquad (D.6)$$

Elementul de arc se exprimă atunci prin relația

$$d\vec{s}=\left(\sqrt{g_{11}}\;dx'^1\right)\vec{u}_1+\left(\sqrt{g_{22}}\;dx'^2\right)\vec{u}_2+\left(\sqrt{g_{33}}\;dx'^3\right)\vec{u}_3, \qquad (D.7)$$

unde $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ şi $\vec{u}_3$ sunt versorii bazei $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.

Elementul de arie construit, de exemplu, pe vectorii $d_1\vec{s}$ şi $d_2\vec{s}$ se va scrie astfel

$$\begin{cases}d\vec{S}_3=d_1\vec{s}\times d_2\vec{s}=\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x'^1}\times\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial x'^2}dx'^1\,dx'^2;\\ \left|d\vec{S}_3\right|=\left|\vec{e}_1\times\vec{e}_2\right|\,dx'^1\,dx'^2,\end{cases} \qquad (D.8)$$

fiind un vector ortogonal la planul determinat de $\vec{e}_1$ şi $\vec{e}_2$ (dar nu neapărat în direcția lui $\vec{e}_3$!).

Elementul de volum se găseşte efectuând produsul mixt

$$d\tau=(d_1\vec{s},d_2\vec{s},d_3\vec{s})=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)dx'^1\,dx'^2\,dx'^3=\sqrt{-g}\;dx'^1dx'^2\,dx'^3. \qquad (D.9)$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Operatori diferențiali de ordinul întâi în coordonate curbilinii

În cadrul Anexei C au fost obținute expresiile operatorilor divergență, gradient și rotor în patru dimensiuni. Acestea sunt valabile, evident, și în trei dimensiuni, cu observația că aici $\det(g_{ik})=+1$. Renunțând la indicece „prim" atribuit lui x^{α}, să le transcriem mai jos:

$$div\,\vec{A}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{g}A^{\alpha}\right)\ (\alpha=1,2,3); \tag{D.10}$$

$$(grad\,\Phi)_{\alpha}=\frac{\partial\Phi}{\partial x^{\alpha}};\ (grad\,\Phi)^{\alpha}=g^{\alpha\beta}\frac{\partial\Phi}{\partial x^{\beta}}; \tag{D.11}$$

$$\Delta\Phi=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{g}\,g^{\alpha\beta}\frac{\partial\Phi}{\partial x^{\beta}}\right). \tag{D.12}$$

Pentru a exprima componentele rotorului, vom considera tensorul antisimetric (vezi C.63)

$$F_{\alpha\beta}=A_{\beta,\alpha}-A_{\alpha,\beta}. \tag{D.13}$$

Să notăm cu B_{α} pseudotensorul dual, asociat tensorului antisimetric (D.13), adică

$$B_{\alpha}=\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta\gamma}F^{\beta\gamma}=\frac{1}{2}\sqrt{g}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}F^{\beta\gamma}, \tag{D.14}$$

unde am utilizat relația (C.44), care își menține valabilitatea în trei dimensiuni. Prin urmare, componentele covariante și contravariante ale rotorului câmpului vectorial $\vec{A}$ vor fi

$$\begin{cases}\left(rot\vec{A}\right)_{\alpha}=\dfrac{1}{2}\sqrt{g}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}F^{\beta\gamma},\\ \left(rot\vec{A}\right)^{\alpha}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\beta\gamma}.\end{cases} \tag{D.15}$$

Coordonate curbilinii ortogonale

În multe aplicații practice intervine cazul în care vectorii bazei $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ formează un triedru ortogonal (drept). Coordonatele curbili-

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

nii se numesc, în acest caz, *ortogonale*. Într-un astfel de sistem de coordonate tensorul metric este *diagonal*, adică satisface relațiile

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} g_{\alpha\alpha}, & (\alpha = \beta) \ \text{(fără sumare)}; \\ 0, & (\alpha \neq \beta). \end{cases} \tag{D.16}$$

În coordonate curbilinii ortogonale nu se utilizează, în general, componentele contravariante şi covariante ale tensorilor, ci componentele *ortogonale* (sau *fizice*) ale acestora. Pentru a stabili relațiile de trecere de la componentele covariante şi contravariante la cele ortogonale ale unui vector $\vec{A}$, vom reprezenta vectorul în baza $\vec{e}_\beta$ $(\beta = 1,2,3)$, apoi îl vom înmulți scalar cu versorul tangentei la curba de coordonate pe care îl proiectăm. Notând cu $A_{(\alpha)}$ componentele ortogonale, avem

$$A_{(\alpha)} = \vec{A} \cdot \vec{u}_\alpha = A^\beta \, \vec{e}_\beta \cdot \vec{u}_\alpha = A^\beta \sqrt{g_{\beta\beta}} \, \vec{u}_\beta \cdot \vec{u}_\alpha = A^\beta \sqrt{g_{\beta\beta}} \, \delta_{\alpha\beta} =$$

$$\sqrt{g_{\alpha\alpha}} \, A^\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \, g^{\alpha\alpha} A_\alpha = \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \, A_\alpha = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} A_\alpha \ \text{(fără sumare)},$$

sau

$$A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} A_{(\alpha)}; \ A_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \, A_{(\alpha)}. \tag{D.17}$$

Să scriem expresiile operatorilor diferențiali (D.10)÷(D.15) în coordonate curbilinii ortogonale. Utilizând relațiile (D.17), găsim

$$div \, \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}}} A_{(1)} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\sqrt{\frac{g}{g_{22}}} A_{(2)} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\sqrt{\frac{g}{g_{33}}} A_{(3)} \right) \right],$$

sau, dacă avem în vedere că $g = g_{11} \, g_{22} \, g_{33}$,

$$div \, \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\sqrt{g_{22} \, g_{33}} \, A_{(1)} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\sqrt{g_{33} \, g_{11}} \, A_{(2)} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\sqrt{g_{11} \, g_{22}} \, A_{(3)} \right) \right] \tag{D.18}$$

De asemenea,

$$\begin{cases} (grad \, \Phi)_\alpha = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} = \sqrt{g_{\alpha\alpha}} \, (grad \, \Phi)_{(\alpha)}; \\ (grad \, \Phi)^\alpha = g^{\alpha\alpha} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} (grad \, \Phi)_{(\alpha)}, \end{cases}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

din ambele rezultând, în mod evident, una și aceeași relație

$$(grad\,\Phi)_{(\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}}. \qquad (D.19)$$

În mod asemănător, găsim:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\frac{g_{22}\,g_{33}}{g_{11}}}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{g_{33}\,g_{11}}{g_{22}}}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{\frac{g_{11}\,g_{22}}{g_{33}}}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right)\right]. \qquad (D.20)$$

În fine, din (D.14) și (D.17) avem

$$\left(rot\,\vec{A}\right)_{(\alpha)} = \left(\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\right)^{-1}\left(rot\,\vec{A}\right)_{\alpha} = \left(2\sqrt{g_{\alpha\alpha}}\right)^{-1}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\,F^{\beta\gamma}\ \text{(fără sumare)}. \qquad (D.21)$$

Pentru a detalia expresiile rotorului, vom calcula o componentă, de exemplu $\left(rot\,\vec{A}\right)_{(1)}$, celelalte două componente obținându-se prin permutări circulare. Avem

$$\left(rot\,\vec{A}\right)_{(1)} = \sqrt{g_{22}\,g_{33}}\,F^{23} = \sqrt{g_{22}\,g_{33}}\,g^{22}\,g^{33}F_{23} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}\,g_{33}}}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x^2}-\frac{\partial A_2}{\partial x^3}\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{g_{22}\,g_{33}}}\left[\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g_{33}}\,A_{(3)}\right)-\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g_{22}}\,A_{(2)}\right)\right].$$

Componentele rotorului vor fi așadar

$$\begin{cases}\left(rot\,\vec{A}\right)_{(1)} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{22}\,g_{33}}}\left[\dfrac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g_{33}}\,A_{(3)}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g_{22}}\,A_{(2)}\right)\right];\\ \left(rot\,\vec{A}\right)_{(2)} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{33}\,g_{11}}}\left[\dfrac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g_{11}}\,A_{(1)}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g_{33}}\,A_{(3)}\right)\right];\\ \left(rot\,\vec{A}\right)_{(3)} = \dfrac{1}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}}\left[\dfrac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g_{22}}\,A_{(2)}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g_{11}}\,A_{(1)}\right)\right].\end{cases} \qquad (D.22)$$

Observație: Uneori se utilizează notația

$$\sqrt{g_{11}} \equiv h_1,\ \sqrt{g_{22}} \equiv h_2,\ \sqrt{g_{33}} \equiv h_3.$$

Cantitățile h_{α} $(\alpha = 1,2,3)$ poartă numele de *coeficienții lui Lamé.*

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Exemple de coordonate curbilinii ortogonale

a) Coordonate sferice. Din expresia metricii

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2, \qquad \text{(D.23)}$$

alegând $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ şi $x^3 = \varphi$, obţinem componentele tensorului metric

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = 1;\ g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = r^2;\ g_{33} = \frac{1}{g^{33}} = r^2 \sin^2\theta\ d\varphi^2, \qquad \text{(D.24)}$$

care ne permit să scriem divergenţa. gradientul, laplaceanul şi rotorul în aceste coordonate. Din (D.18)÷(D.22) obţinem următoarele relaţii:

$$div\,\vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta\, A_r\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r \sin\theta\, A_\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r\, A_\varphi\right)\right]; \qquad \text{(D.25)}$$

$$grad\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\,\vec{u}_\varphi; \qquad \text{(D.26)}$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right]\right\}; \qquad \text{(D.27)}$$

$$rot\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\varphi \sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec{u}_r + \frac{1}{r\sin\theta} \times$$
$$\left[\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\, A_\varphi \sin\theta\right)\right]\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, A_\theta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\vec{u}_\varphi, \qquad \text{(D.28)}$$

în care, $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ şi $\vec{u}_\varphi$ sunt versorii celor trei direcţii reciproc ortogonale.

b) Coordonate cilindrice. Ca şi în exemplul precedent, vom deduce componentele tensorului metric din expresia metricii

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2 + dz^2. \qquad \text{(D.29)}$$

Dacă alegem $x^1 = \rho$, $x^2 = \theta$ şi $x^3 = z$, găsim

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = 1;\ g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = \rho^2;\ g_{33} = \frac{1}{g^{33}} = 1. \qquad \text{(D.30)}$$

Utilizând (D.30), obţinem următoarele expresii ale operatorilor diferenţiali divergenţă, gradient, laplacean şi rotor:

$$div\,\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\, A_\rho\right) + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\, A_z\right)\right]; \qquad \text{(D.31)}$$

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$grad\,\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\,\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\,\vec{u}_\theta + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\vec{k}\,; \tag{D.32}$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \rho\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right]; \tag{D.33}$$

$$rot\,\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}A_\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right)\vec{k}, \tag{D.34}$$

unde, $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$ şi $\vec{k}$ sunt versorii direcţiilor de coordonate ρ, θ şi respectiv z.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ANEXA E

DISTRIBUȚIA δ A LUI DIRAC

După cum se știe, densitatea volumică a unei distribuții de sarcină electrică alcătuită dintr-o singură sarcină electrică punctiformă este zero peste tot, cu excepția punctului în care se află sarcina, unde este infinită. Acesta este un exemplu de *distribuție*. În timp ce o *funcție* „obișnuită", $y(x)$, este definită ca o corespondență între o mulțime de valori ale lui y corespunzând unor valori ale lui x, distribuția este o *funcțională* caracterizată prin aceea că fiecărei funcții face să-i corespundă un număr. De exemplu, fiind dată funcția $f(x)$, aceasta definește o distribuție atașând lui $f(x)$ valoarea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, y(x)\, dx .$$

Distribuția δ a lui Dirac se poate defini cu ajutorul unor funcții care, la limită, tind spre δ. Fie, de pildă, $\delta(x,\ \alpha)$ o funcție ce depinde de variabila x și un parametru $\alpha > 0$ și care satisface condițiile

$$\begin{cases} \lim\limits_{\alpha\to 0} \delta(x,\ \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x \neq 0, \\ \infty, & \text{pentru } x = 0; \end{cases} \\ \lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x,\alpha)\, dx = 1. \end{cases} \tag{E.1}$$

Să notăm

$$\begin{cases} \delta(x) = \lim\limits_{\alpha\to 0} \delta(x,\alpha), \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = \lim\limits_{\alpha\to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x,\alpha)\, dx = 1. \end{cases} \tag{E.2}$$

Atragem atenția asupra faptului că, în general, nu este realizată convergența uniformă a lui $\delta(x,\alpha)$ pentru $x = 0$ și $\alpha \to 0$, deci operațiile de limită și integrare nu pot fi inversate; (E.2-2) este, așadar, o simplă notație. În același sens trebuie înțeleasă integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x)\, dx = \lim_{\alpha\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \delta(x,\ \alpha)\, dx , \tag{E.3}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde $f(x)$ este o funcție continuă pe întreg intervalul.

Fie $[a,\ b]$ un interval închis pe axa Ox și x_0 un punct pe axă. Rezultă atunci

$$\begin{cases} \delta(x-x_0)=\begin{cases}0, & x\neq x_0;\\ \infty, & x=x_0,\end{cases} \\ \int\limits_a^b \delta(x-x_0)\,dx=\begin{cases}1, & x_0\in[a,b];\\ 0, & x_0\notin[a,b].\end{cases}\end{cases} \tag{E.4}$$

Dacă extindem integrala între $-\infty$ și $+\infty$, avem

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\,dx=1. \tag{E.5}$$

Prin definiție,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx=f(x_0). \tag{E.6}$$

De aici, pentru $x_0=0$ avem

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx=f(0). \tag{E.7}$$

Relațiile (E.6) și (E.7) exprimă așa-numita *proprietate de filtraj* a distribuției delta.

Exemple

a) Fie $\delta(x,\ \alpha)$ de forma

$$\delta(x,\ \alpha)=\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2},\ (\alpha>0). \tag{E.8}$$

Avem

$$\lim_{\alpha\to 0}\delta(x,\ \alpha)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\pi}\frac{1}{\alpha+\dfrac{x^2}{\alpha}}=\begin{cases}0, & x\neq 0;\\ \infty, & x=0,\end{cases}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,\ \alpha)\,dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\,dx=\frac{1}{\pi}\left(arctg\frac{x}{\alpha}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=1.$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

b) Fie

$$\delta(x,\ \alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha},\ x\in\left[-\dfrac{\alpha}{2},+\dfrac{\alpha}{2}\right];\\ 0\ ,\ x\notin\left[-\dfrac{\alpha}{2},+\dfrac{\alpha}{2}\right].\end{cases}\tag{E.9}$$

Avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x,\ \alpha)\,dx=\frac{1}{\alpha}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} f(x)\,dx\,.$$

Aplicând teorema mediei, putem scrie

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} f(x)\,dx=f(\xi)\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{+\frac{\alpha}{2}} dx=\alpha\,f(\xi),$$

unde $\xi\in\left[-\dfrac{\alpha}{2},+\dfrac{\alpha}{2}\right]$. Prin urmare,

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x,\ \alpha)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx=f(0),$$

căci la limita $\alpha\to 0$ intervalul $\left[-\dfrac{\alpha}{2},+\dfrac{\alpha}{2}\right]$ se restrânge la un punct, anume originea. Prin aceasta, am arătat că funcția (E.9) verifică definiția (E.7).

c) Fie

$$\delta(x,\ \alpha)=\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}.\tag{E.10}$$

Avem

$$\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=1,$$

prin urmare,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}=\delta(x)\,.$$

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Proprietăți ale distribuției delta

1) Fie $y_1(x)$ și $y_2(x)$ două distribuții cunoscute, iar a și b două constante. Prin definiție, distribuția $y = ay_1 + by_2$ se va exprima sub forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)[ay_1 + by_2]dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,y_1(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,y_2(x)\,dx. \quad \text{(E.11)}$$

2) Fie $y(x)$ o funcție cu proprietatea că $y(\pm\infty) = 0$. Avem atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{dy}{dx}dx = [f\,y]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df}{dx}y\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df}{dx}y\,dx. \quad \text{(E.12)}$$

Dacă $y(x)$ este o distibuție cunoscută, atunci relația (E.12) se consideră ca definiție a derivatei acestei distribuții, dy/dx, în raport cu variabila ei, x. De pildă, derivata $\frac{d}{dx}[\delta(x)]$ se va exprima prin

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{d}{dx}[\delta(x)]dx = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{df}{dx}\,\delta(x)\,dx = -\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=0}. \quad \text{(E.13)}$$

În general,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n\left[f^{(n)}(x)\right]_{x=0}. \quad \text{(E.13')}$$

3) Dacă y este o funcție de x, iar x o funcție de t, adică avem dependența compusă $y[x(t)]$, atunci

$$\int f(t)\,y[x(t)]dt = \int f[t(x)]\,y(x)\frac{dt}{dx}dx. \quad \text{(E.14)}$$

Această relație se consideră ca definiție a distribuției $y[x(t)]$, unde distribuția $y(x)$ este cunoscută, iar $x(t)$ este o funcție.

4) Ca aplicație, să calculăm

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(-x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(-y)\,\delta(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-y)\,\delta(y)\,dy =$$

$$f(0) = +\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx,$$

unde am utilizat (E.7). Întrucât această relație este adevărată pentru orice $f(x)$, rezultă

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$\delta(-x)=\delta(x), \tag{E.15}$$

adică distribuția delta este *pară*.

5) Un alt exemplu îl oferă schimbarea de variabilă $y=a\,x$, unde constanta a este pozitivă sau negativă. Dacă $a>0$, avem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(a\,x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{y}{a}\right)\delta(y)\frac{dy}{a}=\frac{1}{a}f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\frac{\delta(x)}{a}dx.$$

Dacă $a<0$, utilizând (E.15) găsim $\delta(ax)=\delta(-ax)$, prin urmare $-a$ este pozitiv în acest caz. Din ultima relație rezultă atunci

$$\delta(a\,x)=\frac{1}{|a|}\delta(x). \tag{E.16}$$

6) În trei dimensiuni, corespunzătoare variabilelor x, y și z, distribuția δ se definește prin

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)=\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)=\begin{cases}0, & \vec{r}\neq\vec{r}_0;\\ \infty, & \vec{r}=\vec{r}_0,\end{cases} \tag{E.17}$$

$$\int_D \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,d\vec{r}=\begin{cases}1, & P_0(x_0,\,y_0,\,z_0)\in D;\\ 0, & P_0(x_0,\,y_0,\,z_0)\notin D,\end{cases} \tag{E.18}$$

$$\int_D f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,d\vec{r}=\begin{cases}f(r_0), & \vec{r}_0\in D;\\ 0, & \vec{r}_0\notin D,\end{cases} \tag{E.19}$$

sau, dacă extindem domeniul de integrare la întregul spațiu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\,d\vec{r}=f(\vec{r}_0), \tag{E.20}$$

unde $d\vec{r}=dx\,dy\,dz$.

7) Fie $f(\vec{r})\equiv f(x,y,z)$ o funcție de coordonate. Transformata Fourier a acesteia este

$$F\left(\vec{k}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int f\left(\vec{r}\right)e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}\,d\vec{r}, \tag{E.21}$$

iar transformata Fourier inversă

$$f\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int F\left(\vec{k}\right)e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}\,d\vec{k}, \tag{E.22}$$

unde $d\vec{k}=dk_x dk_y dk_z$. Înlocuind (E.21) în (E.22), avem

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

$$f(\vec{r}) = \int f(\vec{r}\,') \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\, d\vec{k} \right] d\vec{r}\,'.$$

Utilizând (E.20), rezultă

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\, d\vec{k}\,, \tag{E.23}$$

care exprimă *transformata Fourier a distribuției* δ *tridimensionale.*

8) Să admitem că funcția $\varphi(x)$ are numai rădăcini simple: $x_1, x_2, ..., x_n$, (adică $\varphi(x_i)=0;\ \varphi'(x_i)\neq 0,\ i=1,2...,n$). Putem scrie atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta[\varphi(x)]\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,\delta[\varphi(x)]\,dx,$$

unde $a_o < x_1 < a_1 < x_2 < a_2 < ... < a_{n-1} < x_n < a_n$. Utilizând (E.16), avem

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,\delta[\varphi(x)]\,dx = \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} f(x)\,\delta\left[\varphi'(\xi)(x-x_i)\right]dx = \frac{f(x_i)}{|\varphi'(x_i)|},$$

deci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta[\varphi(x)]\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{|\varphi'(x_i)|}\,dx,$$

de unde rezultă

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{|\varphi'(x_i)|}. \tag{E.24}$$

În particular, dacă $\varphi(x) = x^2 - a^2$, avem

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{\delta(x+a)+\delta(x-a)}{2|a|}. \tag{E.25}$$

*
* *

Utilizând distribuția δ, vom scrie densitatea de sarcină electrică a unei distribuții alcătuită dintr-o singură sarcină electrică punctiformă, ca fiind

$$\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0). \tag{E.26}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Prin urmare, putem formula următoarele interpretări:

a) $\delta(x)$ este densitatea unei distribuții liniare de sarcină electrică, alcătuită dintr-o singură sarcină punctiformă de valoare +1 (măsurată în coulombi), aflată în origine;

b) $\delta(x-x_0)$ este densitatea unei distribuții liniare de sarcină de valoare +1, aflată în punctul de coordonată x_0;

c) $\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$ este densitatea (volumică) a unei distribuții spațiale alcătuită dintr-o singură sarcină electrică punctiformă egală cu unitatea, aflată în punctul $P_0(\vec{r}_0)$.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

ANEXA F

FUNCȚIA GREEN

Numeroase fenomene fizice sunt descrise prin ecuații de tipul

$$L f(\vec{r}) = u(\vec{r}), \tag{F.1}$$

unde L este un operator diferențial liniar, $f(\vec{r})$ – o funcție necunoscută, iar $u(\vec{r})$ – o funcție dată. Dacă putem scrie

$$f(\vec{r}) = \int G(\vec{r}, \vec{r}\,') u(\vec{r}\,') d\tau', \tag{F.2}$$

atunci funcția $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ este soluție a ecuației

$$L G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,') \tag{F.3}$$

și se numește *funcție Green* atașată ecuației (F.1).

Fenomenele electrodinamice la care ne referim în cadrul aplicațiilor sunt descrise prin ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea, neomogene, de forma

$$L f(x) = -\rho(x), \tag{F.4}$$

unde operatorul diferențial L poate fi: laplaceanul Δ, dalambertianul $\Box$ etc., x este o variabilă sau un grup de variabile $x_1, x_2, \ldots$, iar funcția scalară $f(x)$ se numește *densitatea sursei.* Dacă $f(x)$ este o funcție vectorială, atunci și $\rho(x)$ este o funcție vectorială. Astfel de ecuații sunt, de pildă, ecuațiile potențialelor electrodinamice, în care rolul de densitate a sursei, ρ, îl joacă densitatea spațială de sarcină electrică, respectiv densitatea curentului de conducție.

Soluția ecuației (F.4) se scrie simbolic astfel

$$f(x) = -L^{-1}\rho(x), \tag{F.5}$$

Utilizând distribuția δ a lui Dirac, putem scrie

$$\rho(x) = \int_D \tilde{\rho}(x')\delta(x - x')dx'. \tag{F.6}$$

Întrucât operatorul L acționează numai asupra variabilei x, avem

$$f(x) = -\int_D \tilde{\rho}(x')\left[L^{-1}\delta(x - x')\right]dx'. \tag{F.7}$$

Potrivit lui (F.2), vom introduce funcția Green, $G(x, x')$, prin operația

$$G(x, x') = -L^{-1}\,\delta(x - x') + G_0(x, x'), \tag{F.8}$$

BCU IAȘI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

unde funcția $G_0(x, x')$ verifică condiția $LG_0(x, x')=0$, adică

$$LG(x, x')=-L\left[L^{-1}\delta(x-x')\right]+LG_0(x, x')=-\delta(x-x'). \qquad (F.9)$$

Rezultă atunci

$$f(x)=\int_D G(x, x')\tilde{\rho}(x')dx'. \qquad (F.10)$$

Având în vedere că distribuția $\delta(x-x')$ este pară, din (F.8) decurge faptul că funcția $G(x, x')$ este *simetrică*:

$$G(x, x')=G(x', x).$$

Cu alte cuvinte, o sursă situată în punctul P' produce în punctul P același efect cu cel produs în P', dacă sursa este situată în P.

Dacă utilizăm ca variabile pe x, y, z, t, funcția Green $G(\vec{r},t;\vec{r}',t')$ verifică ecuația diferențială

$$LG(\vec{r},t;\vec{r}',t')=-\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')\delta(t-t'), \qquad (F.11)$$

prin urmare ecuația

$$Lf(\vec{r}, t)=-\rho(\vec{r}, t) \qquad (F.12)$$

are ca soluție

$$f(\vec{r},t)=\int G(\vec{r},t;\vec{r}',t')\tilde{\rho}(\vec{r}',t')d\vec{r}'dt', \qquad (F.13)$$

unde $d\vec{r}'=dx'dy'dz'$. Problema găsirii soluției ecuației (F.12) se reduce, așadar, la determinarea funcției Green pentru cazul studiat.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Bibliografie

[1] Alexeev, A., *Recueil de problèmes d'électrodynamique*, Editions Mir, Moscou, 1980.

[2] Crawford, Jr., F.S., *Unde*, Cursul de fizică Berkeley, Vol. III, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

[3] Crăciun, D., *Teoria relativităţii restrânse şi electrodinamică prin probleme*, Tipografia Universităţii de Vest, Timişoara, 1997.

[4] Grechko, L.G., Sugarov, V.I., Tomasevich, O.F., Fedorcenko, A.M., *Problems in Theoretical Physics*, Mir Publishers, Moscow, 1977.

[5] Hulin-Yung, Nicole, *Ondes électromagnétiques, Relativité – Travaux dirigés*, Hermann Collection, Paris, 1968.

[6] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, Inc., New-York, London, Sydney, Toronto, 1975.

[7] Jackson, J.D., *Electrodinamica clasică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1991.

[8] Lightman, A.P., Press, W.H., Price, R.H., Teukolsky, S.A., *Problem Book in Relativity and Gravitation*, Princeton University Press, 1975.

[9] Lumbroso, H., *Problèmes de Physique commentés*, Tome II, Masson et C^{ie}, Editeurs, 1972.

[10] Mercheş, I., *Electrodinamică şi teoria relativităţii*, Centrul de multiplicare al Universităţii „Al.I. Cuza", Iaşi, 1985.

[11] Mercheş, I., Burlacu, L., *Applied Analytical Mechanics*, „The Voice of Bucovina" Press, Iaşi, 1995.

[12] Mercheş, I., Radu, D., *Electrodinamică*, Editura Universităţii „Al.I. Cuza", Iaşi, 2002.

[13] Novacu, V., *Electrodinamica*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.

[14] Novacu, V., *Culegere de probleme de electrodinamică*, Ediţia a II-a, Editura Tehnică, Bucureşti, 1964.

[15] Purcell, M.E., *Electricitate şi magnetism*, Cursul de fizică Berkeley, Vol. II, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[16] Radu, D., Aştefănoaei, I., *Noţiuni fundamentale şi probleme de mecanică analitică*, Editura Sedcom Libris, Iaşi, 2005.

[17] Roşculeţ, M., *Analiză matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984.

BCU IAŞI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

[18] Tutovan, V., Gottlieb. I., *Probleme de electrostatică*, Editura Tehnică a Universităţii Tehnice a Moldovei, Chişinău, 1998.

[19] Vasiu, M., *Electrodinamică şi teoria relativităţii*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.

[20] Vekştein, E.G., *Sbornik zadaci po electrodinamike*, Izdatelistvo „Vâssaia Şkola", Moskva, 1966.

[21] Vulcanov, D.N., *Curs de electrodinamică şi teoria relativităţii*, Editura Mirton, Timişoara, 1995.

[22] Vulcanov, D.N., Cotăescu, I.I., *Teste-grilă pentru examenul de electrodinamică şi teoria relativităţii*, Editura Mirton, Timişoara, 1998.

BCU IASI / CENTRAL UNIVERSITY LIBRARY

Puține sunt disciplinele care să aibă o aplicabilitate mai largă – sau cel puțin comparabilă – cu cea a *Electrodinamicii* şi ale căror teorii să fie verificate experimental cu o atât de mare exactitate. Practic, cvasitotalitatea aparaturii şi tehnicii utilizate la ora actuală pe mapamond funcționează pe baza legilor electrodinamicii.

Această teorie, care este de o frumusețe şi o armonie aparte, confirmă pe deplin înțelepciunea cuprinsă în sintagma *„Marile adevăruri sunt simple"*. Prin rezultatele de excepție obținute de către unul dintre cei mai de seamă fizicieni ai tuturor timpurilor, *James Clerk Maxwell*, Electrodinamica a fost prima teorie care a deschis calea soluționării uneia dintre problemele centrale ale fizicii, anume descrierea *unitară* a tuturor fenomenelor naturii, în cadrul unei *Teorii a marii unificări*. Într-adevăr, prin celebrul sistem de ecuații ce îi poartă numele şi care stă la baza întregii electrodinamici fenomenologice, Maxwell a reuşit pentru prima dată să descrie unitar fenomenele de natură electrică şi cele de natură magnetică, în cadrul teoriei electromagnetismului. Câmpul electromagnetic a fost – cronologic vorbind – primul câmp cuantificat, acest lucru fiind înfăptuit în anul 1927 de către un alt fizician de marcă al lumii, *Paul Adrien Maurice Dirac*, care a pus astfel bazele unuia dintre cele mai eficace instrumente de studiu în toate ramurile fizicii, anume *Teoria cuantică a câmpului*.

În orice disciplină ştiințifică există două mari categorii de aplicații: efective (de laborator) şi teoretice (rezolvări de probleme). Prezentul volum se adresează celor ce doresc să aprofundeze cunoştințele teoretice de Electrodinamică prin solutionarea unor probleme specifice.

ISBN 978-973-1809-49-6
9 789731 809496

BCU IASI / CEN